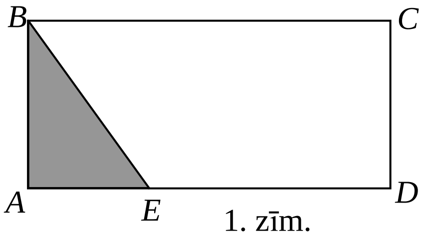
Latvijas 41. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

5. klase

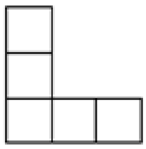
1. Pūkainīšu ciemata bērniem Lieldienu zaķis atnesa olas. Katra no tām bija nokrāsota tieši vienā no krāsām – sarkanā, dzeltenā, zilā. Zināms, ka 20% jeb 40 olas bija sarkanas, $\frac{3}{4}$ no atlikušajām bija dzeltenas, bet pārējās – zilas. Aprēķini:
1) Cik olas bija zilā krāsā?
2) Kāda daļa no visām olām bija zilas?
3) Cik procenti no visām olām bija dzeltenas?

2. Divu naturālu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari 2, 3, 7 un 8. Vai var gadīties, ka viens skaitlis ir tieši trīs reizes lielāks nekā otrs skaitlis?

3. Taisnstūra *ABCD* malu garumi izsakāmi veselos centimetros. Iekrāsotās daļas laukums ir 6 cm^2 (skat. 1. zīm.). Nogrieznis *AE* ir $\frac{1}{3}$ no taisnstūra malas *AD*. Aprēķini taisnstūra laukumu un perimetru, ja zināms, ka viena taisnstūra mala ir par 5 cm garāka nekā otra mala.



1. zīm.


2. zīm.

4. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām.
Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 2. zīm. attēlotā figūra (figūras var būt pagrieztas jebkurā stāvoklī)?

5. Kāds ir **a)** mazākais, **b)** lielākais skaitlis, kuru var izteikt gan kā trīs, gan kā divu dažādu divciparu naturālu skaitļu reizinājumu?

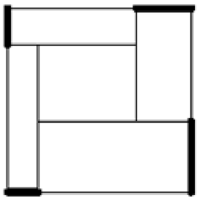
6. klase

1. Klementīne ar trīs savām draudzenēm brīvdienās gāja makšķerēt. Tētis viņai atļāva paņemt pusi no savas makšķerauklas. 60% no savas daļas viņa atdeva vienai draudzenei, 50% no atlikušās daļas – otrai draudzenei un $\frac{2}{3}$ no atlikušās auklas – trešajai draudzenei. Beigās Klementīnei pašai palika 1 metrs makšķerauklas. Cik gara bija makšķeraukla pašā sākumā?

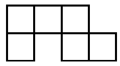
2. Vai skaitļus no 1 līdz 100 var sadalīt divās grupās tā, ka skaitļu reizinājumi abās grupās ir vienādi?

3. Ķērpjbārdis aizsūtīja Puszābaku uz veikalu pēc 3 ksilofoniem, 20 mikrofoniem un viena patafona. Puszābaks atgriezās, nopircis 20 ksilofonus, vienu mikrofonu un 3 patafonus, pie tam viņš bija iztērējis tieši tik daudz naudas, cik būtu arī, ja būtu nopircis to, ko Ķērpjbārdis viņam lūdza. Zināms, ka patafons ir lētāks nekā ksilofons. Kas ir dārgāks – ksilofons vai mikrofons? Atbildi pamatot!

4. Kvadrāts, kura malas garums ir 4 m, sagriezts taisnstūros, kā parādīts 3. zīm. Četru izcelto nogriežņu garumu summa ir 2 m. Aprēķināt iekšējā taisnstūra perimetru!



3. zīm.



4. zīm.

5. Rūtiņu kvadrātā 5×5 iekrāsot iespējami maz rūtiņu tā, lai atlikušajā daļā vairs nevarētu ievietot nevienu 4. zīm. redzamo figūru (tā var būt gan pagriezta, gan apgāzta). Pamatot, ka iekrāsoto rūtiņu skaits ir mazākais iespējamais!

7. klase

1. Trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BD* un mediāna *BE*. Kāds var būt *AC* garums, ja $ED=4$ cm un $DC=5$ cm?

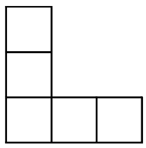
2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus *a* un *b*, kuriem izpildās vienādība $a\cdot(3a+5b)\cdot 7b=7654321$?

3. Lelde apgalvo, ka sešas skrūves ir smagākas nekā septiņas naglas, bet Elīna apgalvo, ka septiņas skrūves ir smagākas nekā astoņas naglas. Zināms, ka vienai no meitenēm ir taisnība, bet otra kļūdās. Vai tiesa, ka 18 skrūves ir smagākas nekā **a)** 20 naglas, **b)** 21 nagla, **c)** 22 naglas? Visām skrūvēm svars ir vienāds, visām naglām arī.

4. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 5. zīm.). Kādam skaitlim jābūt rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi? Atrodiet visas iespējamās vērtības un pamatojiet, ka citu nav!

	24	
		?
13		

5. zīm.



6. zīm.

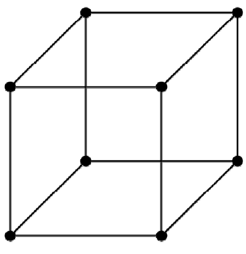
5. Kādu mazāko skaitu rūtiņu jāizgriež no kvadrāta 6×6 rūtiņas, lai no atlikušās daļas nevarētu izgriezt 6. zīm. parādīto figūru? (Figūru malām jāiet pa rūtiņu līnijām.)

8. klase

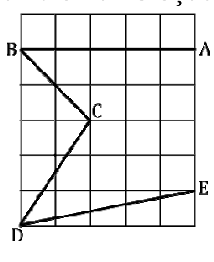
1. Skaitli $\frac{1}{13}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja 2014. ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?

2. Atrast visus naturālos skaitļus, kas nepārsniedz 1 000 000 un kuri, nosvītrojot to pirmo ciparu, samazinās 15 reizes!

3. Astoņi punkti savienoti ar šķautnēm kā kuba karkass (skat. 7. zīm.). Pierādīt, ka, izvēloties jebkurus 5 punktus, tie būs savienoti ar vismaz 3 šķautnēm!



7. zīm.



8. zīm.

	24	
?		

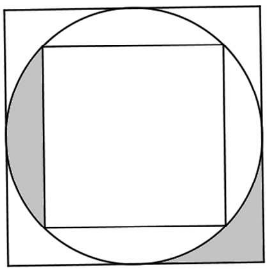
9. zīm.

4. Rūtiņu lapā rūtiņu virsotnēs atzīmēti punkti *A*, *B*, *C*, *D*, *E* un novilkti nogriežņi *AB*, *BC*, *CD* un *DE* (skat. 8. zīm.). Kurš no leņķiem $\angle ABC$ vai $\angle CDE$ ir lielāks?

5. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Augšējās rindas vidējā rūtiņā ierakstīts skaitlis 24 (skat. 9. zīm.). Vai rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, var būt ierakstīts skaitlis **a)** 7, **b)** 17 ?

9. klase

1. Kvadrātā, kura malas garums ir 2, ievilkts riņķis un šajā riņķī ievilkts kvadrāts (skat. 10. zīm.). Aprēķināt iekrāsoto daļu laukumu summu!



10. zīm.

	6	
	?	
7		

11. zīm.

2. Doti četri dažādi cipari, neviens no tiem nav 0. Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir 1276. Atrast dotos četrus ciparus!

3. Trijstūrī ABC leņķis $\angle ABC = 90°$. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu AC un AM viduspunkti. Caur B, M un N vilktā riņķa līnija krusto malas AB un BC attiecīgi to iekšējos punktos P un Q. Zināms, ka $AC \| PQ$. Aprēķināt $\angle BAC$ lielumu!

4. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas, bet visi tabulā ierakstītie skaitļi ir savā starpā atšķirīgi. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 11. zīm.). Kāds ir mazākais skaitlis, kas var būt ierakstīts tabulas centrālajā rūtiņā?

5. Katram marsietim ir trīs rokas un dažas antenas. Visi marsieši sadevās rokās (katrs marsietis sadevās rokās ar 3 citiem marsiešiem tā, ka visas rokas bija aizņemtas). Izrādījās, ka katriem diviem marsiešiem, kas bija sadevuši rokas, antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes. Vai kopējais antenu skaits visiem marsiešiem var būt 2014?

10. klase

1. Noteikt, vai virkne $a_n = \dfrac{3n+7}{n+2}$, n – naturāls skaitlis, ir augoša vai dilstoša!

2. Dotas divas paralēlas taisnes. Uz vienas no tām atzīmēti 14 zaļi punkti, uz otras – 14 sarkani punkti. Kādu lielāko skaitu nogriežņu, kuriem viens galapunkts ir zaļš, bet otrs – sarkans, var novilkt tā, lai tie nekrustotos?
Saka, ka nogriežņi krustojas, ja tiem ir kopīgs iekšējais punkts, t.i., ja tiem ir kopīgs tikai galapunkts, tie nekrustojas.

3. Aplūkosim funkcijas $y = x^2 + ax + b$, kur $a + 2b = 2014$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts!

4. Doti septiņi dažādi naturāli skaitļi; katriem diviem no dotajiem skaitļiem aprēķināja to summu. Kāds lielākais skaits no šīm summām var būt pirmskaitļi?

5. Uz taisnstūra $ABCD$ diagonāles BD iespējams atrast iekšēju punktu P tā, ka $\angle PAB = \angle PCB$. Pierādīt, ka $ABCD$ ir kvadrāts!

11. klase

1. Uz riņķa līnijas atlikti **a)** 6; **b)** 2014 punkti. Viens no tiem nokrāsots sarkans, bet pārējie – balti. Apskatām visus daudzstūrus, kuriem visas virsotnes ir kādi no nokrāsotajiem punktiem. Kādu daudzstūru ir vairāk – to, kam viena virsotne ir sarkana, vai to, kam visas virsotnes ir baltas?

2. Skaitļu virknei (a_i) visiem $n > 1$ ir spēkā sakarība $a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 a_n$. Aprēķināt a_{50}, ja zināms, ka $a_1 = 1000$.

3. Ap šaurleņķu trijstūri *ABC* apvilkta riņķa līnija. Loka *AB* (kuram nepieder punkts *C*) viduspunkts ir *N*, bet loka *AC* (kuram nepieder punkts *B*) viduspunkts ir *M*. Nogrieznis *NM* krusto malu *AB* punktā *K*. Trijstūrī *ABC* ievilktās riņķa līnijas centrs ir punktā *O*. Pierādīt, ka $OK \parallel AC$!

4. Doti 99 naturāli skaitļi. Zināms, ka nav tāda skaitļa, ar ko dalītos visi šie skaitļi, un ka jebkuru 50 skaitļu reizinājums dalās ar atlikušo 49 skaitļu reizinājumu. Pierādīt, ka visu 99 skaitļu reizinājums ir naturāla skaitļa kvadrāts.

5. Pierādīt, ka izliektu 2014-stūri nevar sadalīt 167 izliektos 14-stūros!

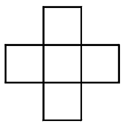
12. klase

1. Atrisināt nevienādību $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \leq 0$.

2. Caur trijstūra *ABC* malas *AB* iekšēju punktu *P* novilkta taisne, kas ir paralēla *BC* un krusto ΔABC apvilkto riņķa līniju punktos *M* un *N* (*M* atrodas uz īsākā loka *AB*, bet *N* – uz īsākā loka *AC*). *MC* krusto *AB* punktā *Q*. Pierādīt, ka *NQ* iet caur trijstūriem *AMQ* un *APN* apvilkto riņķa līniju krustpunktu!

3. Atrast visus pirmskaitļus *p*, kuriem $p^4 - 6$ arī ir pirmskaitlis!

4. Vai kvadrātu ar malas garumu 10 var noklāt ar 25 „krustiņiem" (skat. 12. zīm), kuri sastāv no 5 kvadrātiem ar malas garumu 1? „Krustiņi" drīkst pārklāties, kā arī iziet ārpus dotā kvadrāta malām.



12. zīm.

5. Funkcija $f : R \to R$ definēta visiem reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības. Visiem reāliem skaitļiem *a* un *b* izpildās

$$2f(a) \leq f(b) + f(2a - b).$$

Vai tiesa, ka visiem reāliem *a*, *b* un *c* izpildās

$$3f(a) \leq f(b) + f(c) + f(3a - b - c)?$$