ĪSA PAMĀCĪBA UZDEVUMU RISINĀŠANĀ

Būtiskākais aizrādījums, it īpaši jaunāku klašu skolēniem, ir tas, ka bieži vien tiek uzrakstīta tikai uzdevuma atbilde. Taču ar to ir par maz, lai labotājs spētu saprast, vai risinātājs ir sapratis uzdevumu un atrisinājis to pareizi.

Atcerieties! Visiem uzdevumiem ir jāraksta ne tikai atbilde, bet arī risinājums – spriedumi, kā tu nonāci līdz atbildei.

Uzdevumu veidi

Pirms ķerties pie risināšanas, **rūpīgi jāizlasa** uzdevums, pievēršot vērību katram vārdam. Apskatīsim divus vienkāršus uzdevumiņus:

A „Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 3 **un** kura pēdējais cipars ir 0.” un

B „Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar 3 **vai** kura pēdējais cipars ir 0.”

Doto uzdevumu tekstos atšķiras tikai ar viens vārdiņš, taču tas būtiski maina uzdevuma atbildi. **A** piemērā mums jāatrod tāds mazākais skaitlis, kurš gan beidzas ar 0, gan dalās ar 3; tāds ir skaitlis **30**. Savukārt **B** uzdevumā jāatrod mazākais skaitlis, kuram izpildās vismaz viena no šīm īpašībām: mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 3, ir 3; mazākais naturālais skaitlis, kas beidzas ar 0, ir 10, tātad uzdevuma atbilde ir mazākais no skaitļiem 3 un 10, t.i., skaitlis **3**.

Apkoposim iegūtos secinājumus par saikļu lietojumu:

- ✓ saiklis ***un*** nozīmē, ka **visām** uzdevumā minētajām īpašībām/nosacījumiem **jāizpildās vienlaicīgi**;
- ✓ saiklis ***vai*** nozīmē, ka **jāizpildās vismaz vienai** minētajai īpašībai/nosacījumam (bet vienlaicīgi var izpildīties arī vairākas īpašības/nosacījumi)
- ✓ saiklis ***vai nu …, vai*** nozīmē, ka **jāizpildās tieši vienai** minētajai īpašībai/nosacījumam.

Tālāk aplūkosim biežāk sastopamos uzdevumu veidus.

„Atrast vismazāko/vislielāko vērtību” – šāda veida uzdevumu risinājumam ir jāsastāv no divām daļām: **1) atrast** šo vismazāko/vislielāko vērtību **un uzrādīt piemēru**, **2) pierādīt**, ka mazāka/lielāka vērtība nevar būt. Ļoti bieži tiek aizmirsts tieši par 2) daļu.

„Vai var …?” – uz šāda veida jautājumiem var būt vai nu atbilde **„jā”**, vai nu atbilde **„nē”**. Ja atbilde ir **„jā”**, pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas. Savukārt, ja uzdevuma atbilde ir **„nē”**, ar atsevišķu piemēru apskatīšanu nepietiek, nepieciešams pierādījums, kas balstās uz **vispārīgiem** spriedumiem. Varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies uziet uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr eksistē.

„Kāds var būt…?” – šādos uzdevumos nepietiek atrast vienu iespējamo atbildi – ir jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības un **jāpamato**, ka citu iespēju nav.

Vispārīgās matemātikas metodes

Matemātikā ir izstrādātas metodes un paņēmieni, kas der kāda noteikta veida uzdevumu vai problēmu risināšanai, bet ir arī tādas metodes, plaši pielietojamas daudzās dzīves jomās. Šīs metodes balstās uz vispāratzītām, cilvēces daudzu gadu simtu laikā gūtām atziņām. Tālāk īsumā apskatīsim šīs metodes.

1. Invariantu metode

Vārds ***invariants*** cēlies no latīņu valodas un nozīmē ***nemainīgs***. Tāpēc par ***invariantiem lielumiem/īpašībām*** sauc lielumus/īpašības, kas kādā procesā nemainās, saglabājas.

Invariantu metode bieži ir efektīvi pielietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu operāciju izpilde ar dotajiem lielumiem (tās var būt darbības ar skaitļiem, figūru pārveidojumi u.tml.) un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu iegūt NAV iespējams. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties šādi:

atrodam īpašību, kura PIEMĪT sākumā dotajiem lielumiem, SAGLABĀJAS, veicot pieļaujamās operācijas, bet NEPIEMĪT lielumiem, kuri būtu jāiegūst galarezultātā. (To sauc par *invarianto* īpašību.)

<u>1. piemērs.</u> *Ar skaitli atļauts izpildīt šādas darbības: 1) pareizināt ar 3 vai 2) atņemt 9. Vai, pakāpeniski izpildot šīs darbības vairākas reizes, no skaitļa 30 var iegūt skaitli 1?*

<u>Atbilde:</u> *nē, nevar. Sākotnējais skaitlis 30 dalās ar 3; arī izpildot atļautās darbības, rezultātā iegūtie skaitļi dalīsies ar 3. Savukārt beigās iegūstamais skaitlis 1 ar 3 nedalās. Tāpēc uzdevuma prasības nav izpildāmas. Šajā piemērā invariants ir dalīšanās ar 3.*

Invariantā īpašība atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, summas paritāte, dalāmība ar 3, 4, ..., u.tml. Uzdevumos par figūru sagriešanu rūtiņu plaknē bieži tiek izmantota palīgmetode – ***krāsošana***, un invariantā īpašība ir iekrāsoto rūtiņu skaita nemainība.

<u>2. piemērs.</u> *Vai taisnstūri 5×4 rūtiņas var noklāt ar figūriņām*  *tā, lai nekādas divas figūriņas nepārklātos, taisnstūrī nepaliktu nenoklātas vietas un nekādas figūriņu daļas neizietu ārpus taisnstūra?*

<u>Atbilde:</u> *nē, nevar. Taisnstūris sastāv no 20 rūtiņām, bet viena figūriņa – no 4 rūtiņām. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, taisnstūris būtu noklāts ar tieši 5 figūriņām. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā; pavisam melnā krāsā tiks nokrāsotas 10 (pāra skaits) rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietota dotā figūriņa, tā noklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas, tātad nepāra skaitu melnu rūtiņu. Tāpēc arī 5 šādas figūriņas kopā var noklāt tikai nepāra skaitu melno rūtiņu. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams. Šajā piemērā invariants ir melno rūtiņu skaits – neatkarīgi no skaitīšanas secības (skaitot tās taisnstūrī vai figūriņās), vienu un to pašu objektu skaitam jābūt nemainīgam.*

2. Vidējās vērtības metode

Vidējās vērtības metode idejiski balstās uz šādu principu: ***„Lai paveiktu lielas lietas, vismaz vienā virzienā jāsakoncentrē pietiekami lieli līdzekļi”***.

Uzdevumu risināšanā balstīsimies uz konkrētāk formulētām teorēmām. Minēsim dažas no tām.

1. Starp jebkuriem n skaitļiem ir vismaz viens skaitlis, kas nav mazāks par to vidējo vērtību, un ir vismaz viens skaitlis, kas nav lielāks par to vidējo vērtību.

2. Ja starp lielumiem ir kāds lielums, kas ir lielāks par visu lielumu vidējo vērtību, tad starp tiem ir arī tāds lielums, kas mazāks par visu lielumu vidējo vērtību, un otrādi.

3. Ja neviens no lielumiem nav mazāks (vai lielāks) par visu lielumu vidējo vērtību, tad tie visi ir vienādi ar savu vidējo aritmētisko.

Vidējās vērtības metodes speciālgadījums ir ***Dirihlē princips***:

ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši.

Ir patiess arī vispārīgāks apgalvojums (*vispārinātais Dirihlē princips*):

ja vairāk nekā m·n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz m+1 trusis.

Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt **tikai vienā** būrī un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būriem*).

3. piemērs. *Pierādīt, ka no jebkuriem 14 naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus, kuru starpība dalās ar 13.*

Risinājums. Naturāls skaitlis, dalot ar 13, var dot 13 dažādus atlikumus: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 vai 12. Dotos 14 skaitļus uzskatīsim par „trušiem”, savukārt vienā „būrī” ievietosim tos skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 13, tātad ir 13 „būri”. Saskaņā ar Dirihlē principu, 14 „trušus” izvietojot pa 13 „būriem”, vismaz vienā „būrī” nonāks vismaz divi „truši”; t.i., vismaz divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 13. Bet šo skaitļu starpība dalās ar 13 (skat. „Dalāmības īpašības”, Nr. 5, 5. lpp); prasītais pierādīts.

3. Ekstremālā elementa metode

Šīs metodes būtība balstās uz atziņu, ka ***cilvēka patiesās īpašības un raksturs vislabāk atklājas ekstremālos apstākļos***.

Matemātiski tas nozīmē, ka pētot parādības vai īpašības kādā kopā (skaitļu, figūru, cilvēku u.tml. grupā), tās visspilgtāk izpaužas robežgadījumos; tam elementam, kurš kaut kādā veidā ir īpašs starp citiem pētāmās kopas elementiem.

Ekstremālā elementa metodi matemātikā visizdevīgāk ir lietot tad, kad jāpierāda, vai dotā īpašība ir vai nav spēkā visiem kopas elementiem, citiem vārdiem sakot, kad jāpierāda tādas kopas, kurai piemīt vai nepiemīt konkrētā īpašība, eksistence.

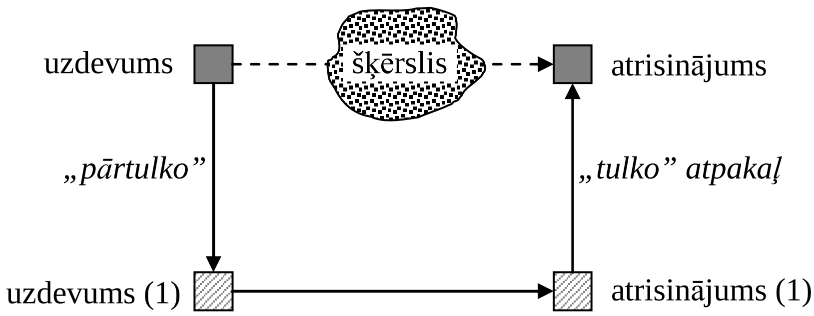
4. piemērs. Vai var gadīties, ka 15 dažādi skaitļi ir izrakstīti pa apli tā, ka katrs skaitlis vienāds ar savu kaimiņu vidējo aritmētisko?

Atbilde: nē, nevar. Apskatīsim vismazāko no uzrakstītajiem skaitļiem M. Tā kā visi skaitļi ir dažādi, tad abi M kaimiņi A un B ir lielāki nekā M: A>M un B>M. Tātad arī skaitļu A un B vidējais aritmētiskais lielāks nekā M: $\frac{A+B}{2} > \frac{M+M}{2} = M$ *. Tā kā vismazākajam no uzrakstītajiem skaitļiem nevar piemeklēt kaimiņus, nevar gadīties, ka 15 skaitļi uzrakstīti atbilstoši uzdevuma prasībām.*

4. Interpretāciju metode

Šīs metodes būtība slēpjas šādā cilvēces dzīves pieredzē gūtā secinājumā „***ja ceļā ir šķērslis, jāmēģina apiet tam apkārt***” jeb uzdevumu risināšanā tas izpaužas šādi:

ja doto uzdevumu ar šajā nozarē pieejamiem līdzekļiem atrisināt ir sarežģīti vai neiespējami, tad doto uzdevumu aizstāj ar atbilstošu uzdevumu citā nozarē, kur atrisinājums iegūstams daudz vienkāršāk vai ir triviāls, atrisina jauno uzdevumu un rezultātu “tulko” atpakaļ uz sākotnējo “valodu”



Risinot uzdevumu ar interpretāciju metodes palīdzību, rīkojas pēc šāda plāna:

1. izvēlas atbilstošu interpretāciju (tas parasti ir vissarežģītākais etaps visā risinājumā);

2. “pārtulko” visus dotos lielumus un sakarības;

3. pārliecinās, ka interpretācija ir korekta;

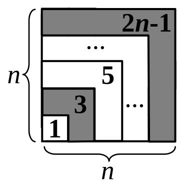
4. atrisina jauno uzdevumu;

5. rezultātu “tulko” atpakaļ.

Kā redzam, lai uzdevumu risināšanā veiksmīgi lietotu interpretāciju metodi, nepieciešamas labas zināšanas daudzās matemātikas (un ne tikai) nozarēs, kā arī labi jāizprot saistība starp lielumiem dažādās nozarēs. Tāpēc interpretāciju metode vairāk ir izmantojama vecākās klasēs.

5. piemērs. Pierādīt, ka $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

Pierādījums. Skaties zīmējumu!



Jaunāko klašu skolēniem uztverami un lietojami interpretāciju piemēri ir teksta uzdevumu risināšana, izmantojot *grafus*, algebrisku izteiksmju aprēķināšana vai pārveidošana, izmantojot laukumus.

Par ***grafu*** sauc *zīmējumu, kas sastāv no punktiem, no kuriem daži pa pāriem ir savienoti ar līnijām*. Gandrīz vienmēr ir izdevīgi zīmēt grafu, ja uzdevumā ir runa par, piemēram, cilvēkiem, kas savā starpā draudzējas, ir pazīstami u.tml., par ceļu vai avioreisu sistēmu starp vairākām pilsētām u.tml. – t.i., gadījumos, kad var pastāvēt vai nepastāvēt sakarības starp diviem *objektiem*. Zīmējot atbilstošo grafu, parasti *objektus* attēlo ar punktiem – tos sauc par *grafa virsotnēm*, un ja starp diviem *objektiem* pastāv uzdevumā minētās attiecības, tad atbilstošos punktus (*virsotnes*) savieno ar līniju – to sauc par *grafa šķautni*. Bieži vien, domājot par uzskatāmo zīmējumu, vieglāk nekā citā ceļā var pamatot uzdevumā prasīto apgalvojumu patiesumu vai atbilstošā grafa neiespējamību.

Mazliet no skaitļu teorijas

Skaitļu teorija ir matemātikas nozare, kas pēta **veselo** skaitļu dalāmību. Saka, ka skaitlis *a* dalās ar skaitli *b* (apzīmē $a \vdots b$), ja eksistē tāds vesels skaitlis *c*, ka $a = b \cdot c$.

Apzīmējums $\overline{...dcba}$ izsaka naturālu skaitli, kas satur *a* vienus, *b* desmitus *c* simtus, *d* tūkstošus utt. (*a*, *b*, *c*, *d*, ... var būt tikai cipari – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Tātad, piemēram, skaitlis $\overline{dcba} = 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$.

Atcerieties! Ja tiek runāts par skaitļu dalāmību, tad runa ir tikai par **veseliem** skaitļiem. 0 ir vesels skaitlis, bet nav naturāls skaitlis.

Dalāmības īpašības

Visi tālāk pieminētie skaitļi ir veseli.

1. Ja *a* dalās ar *c* un *b* dalās ar *c*, tad arī skaitļu *a* un *b* summa un starpība dalās ar *c*.

$$\boxed{a \vdots c \text{ un } b \vdots c \quad \Rightarrow \quad a \pm b \vdots c}$$

2. Ja *a* dalās ar *b*, tad arī skaitļa *a* reizinājums ar jebkuru veselu skaitli *k* dalās ar *b*.

$$\boxed{a \vdots b \quad \Rightarrow \quad a \cdot k \vdots b}$$

3. Ja *a* dalās ar *b* un *b* dalās ar *c*, tad *a* dalās ar *c*.

$$\boxed{a \vdots b \text{ un } b \vdots c \quad \Rightarrow \quad a \vdots c}$$

4. Ja *a* dalās ar *c* un *b* dalās ar *d*, tad $a \cdot b$ dalās ar $c \cdot d$.

$$\boxed{a \vdots c \text{ un } b \vdots d \quad \Rightarrow \quad a \cdot b \vdots c \cdot d}$$

5. Ja divi skaitļi *a* un *b* dod vienādus atlikumus, dalot ar *c*, tad šo skaitļu starpība $a - b$ dalās ar *c*.
6. Ja vienādības labā puse dalās ar *n*, tad arī vienādības kreisā puse dalās ar *n* (un otrādi).

Dalāmības pazīmes

Risinot praktiskus uzdevumus, bieži ir nepieciešams novērtēt, vai dotie skaitļi dalās viens ar otru. Tālāk tiks norādītas pazīmes dalāmībai ar dažiem skaitļiem.

1. Skaitlis dalās ar 2, ja tā pēdējais cipars dalās ar 2 (t.i., ir pāra cipars: 0, 2, 4, 6 vai 8).
2. Skaitlis dalās ar 5, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.

3. Skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējie divi cipari veido skaitli, kas dalās ar 4. (Piemēram, 756**48** dalās ar 4, jo 48 dalās ar 4.)
4. Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējie trīs cipari veido skaitli, kas dalās ar 8. (Piemēram, 5627**104** dalās ar 8, jo 104 dalās ar 8.)
5. Skaitlis dalās ar 3, jā tā ciparu summa dalās ar 3. (Piemēram, 143568 dalās ar 3, jo 1+4+3+5+6+8 = 27 dalās ar 3.)

Līdzīga pazīme arī dalāmībai ar 9:

6. Skaitlis dalās ar 9, jā tā ciparu summa dalās ar 9. (Piemēram, 143568 dalās arī ar 9, jo 1+4+3+5+6+8 = 27 dalās ar 9.)
7. Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu, kas atrodas pāra pozīcijās, summas un ciparu, kas atrodas nepāra pozīcijās, summas starpība dalās ar 11. (Piemēram, 1**2**3**6**4**7**5**9** dalās ar 11, jo (2+6+7+9) – (1+3+4+5) = 24–13 = 11 dalās ar 11.)

Skaitļa sadalījums pirmreizinātājos

Par *pirmskaitli* sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis. Tā kā 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad 1 nav pirmskaitlis.

Aritmētikas pamatteorēma. *Katru naturālu skaitli var vienā vienīgā veidā izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu.*

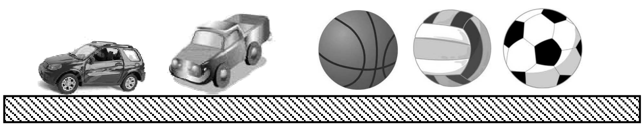
Piemēram, $504 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7 = 2^3\cdot 3^2\cdot 7$. Iegūto pirmskaitļu reizinājumu sauc par skaitļa *sadalījumu pirmreizinātājos*.

Mazliet no kombinatorikas

Bieži nākas aprēķināt, cik ir kāda veida objektu, vai arī noskaidrot, cik dažādos veidos kaut ko no kaut kā var izvēlēties. Risinot šos uzdevumus būtu jāņem vērā tālāk minētie kombinatorikas pamatlikumi.

Kombinatorikas saskaitīšanas likums

6. piemērs. *Veikala plauktā ir 2 dažādas mašīnas un 3 dažādas bumbas (skat. P1. zīm.). Ja Kristaps drīkst izvēlēties tikai vienu no šīm rotaļlietām, tad viņš var izvēlēties* ***vai nu*** *tikai džipu* ***vai*** *tikai pikapu,* ***vai*** *tikai basketbola bumbu,* ***vai*** *tikai volejbola bumbu,* ***vai*** *tikai futbola bumbu. Tātad Kristaps sev vienu rotaļlietu var izvēlēties* $2+3=5$ *dažādos veidos.*

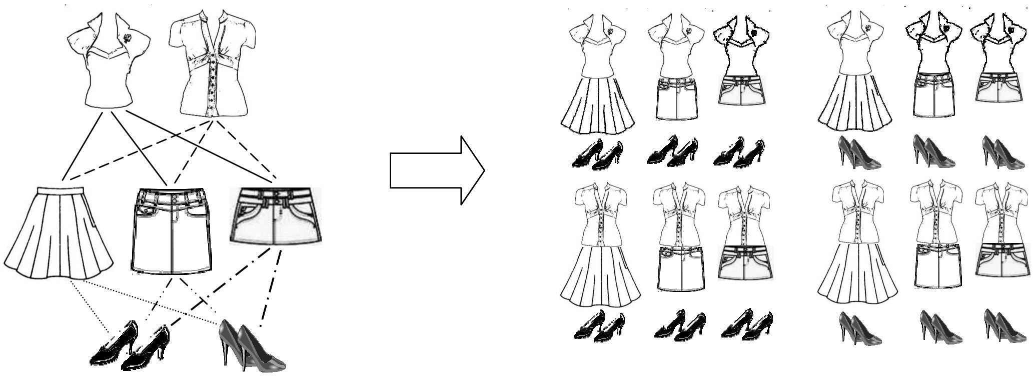


P1. zīm.

Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties attiecīgi $n_1, n_2, n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas vai nu viena, vai otra, vai trešā utt. Veida objekti, tad to var izdarīt pavisam $\boxed{M = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}$ veidos.

Kombinatorikas reizināšanas likums

<u>*7. piemērs.*</u> *Kristīne sev apģērbu no* 2 *dažādām blūzītēm* <u>**un**</u> 3 *dažādiem svārkiem,* <u>**un**</u> 2 *dažādiem kurpju pāriem var izvēlēties* $2\cdot 3\cdot 2=12$ *dažādos veidos (skat. P2. zīm.).*



P2. zīm.

Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties $n_1, n_{2,}\ n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas pa vienam objektam no pirmā veida <u>un</u> otrā veida, <u>un</u> trešā veida utt., tad to pavisam var izdarīt $\boxed{N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots}$ veidos.

Ievērojiet! Ja ir vārdiņš „***vai***” – lietojam saskaitīšanas likumu, vārdiņš „***un***” – reizināšanas likumu!