# BIEŽĀK SASTOPAMIE UZDEVUMU VEIDI

**„Atrast vismazāko / vislielāko vērtību” –** šāda veida uzdevumu risinājumam ir jāsastāv no divām daļām:

1) **atrast** šo vismazāko / vislielāko vērtību un **uzrādīt piemēru**;
2) **pierādīt**, ka mazāka / lielāka vērtība nevar būt.

Ļoti bieži tiek aizmirsts tieši par 2. daļu.

**„Vai var ...?” –** Uz šāda veida jautājumiem var būt vai nu atbilde **„jā”**, vai atbilde **„nē”**. Ja atbilde ir:

- **„jā”**, pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- **„nē”**, ar atsevišķu piemēru apskatīšanu nepietiek, nepieciešams pierādījums, kas balstās uz **vispārīgiem** spriedumiem. Varbūt risinātājam vienkārši nav paveicies uziet uzdevumā prasīto piemēru, bet tāds tomēr eksistē.

**„Kāds var būt ...?” –** šādos uzdevumos nepietiek atrast vienu iespējamo atbildi – ir jāaplūko **visi** iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda **visas** atrastās dažādās vērtības.

# ALGEBRA

**Saīsinātās reizināšanas formulas:**

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$, no kā seko
  - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
  - $(a-b)^2 = (b-a)^2$;
  - $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab^2 + 3ab^2 \pm b^3$.

Par reāla skaitļa $a$ **moduli** jeb absolūto vērtību (apzīmē $|a|$) sauc lielāko no skaitļiem $a$ un $-a$. Tātad $|a| = \begin{cases} a, & \text{ja } a \geq 0, \\ -a, & \text{ja } a < 0. \end{cases}$

**Moduļa īpašības:**

- $|a| \geq 0$;
- $\sqrt{a^2} = |a|$;
- $|-a| = |a|$;
- $|a-b| = |b-a|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$;
- $|a-b| \geq |a| - |b|$;
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, ja $b \neq 0$.

Par skaitļa $x$ **veselo daļu** (apzīmē $[x]$ ) sauc lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz $x$, t. i., veselo skaitli $m$ tādu, ka $m \leq x < m+1$. Piemēram, $[3] = 3$, $[2{,}8] = 2$, $[0{,}2] = 0$, $[-1{,}5] = -2$.

Par skaitļa $x$ **daļveida daļu** (apzīmē $\{x\}$) sauc skaitli $x - [x]$. Piemēram, $\{1{,}3\} = 0{,}3$.

## Polinomi

Par mainīgā $x$ $n$-tās pakāpes **polinomu** sauc algebrisku izteiksmi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

kur $n$ – vesels nenegatīvs skaitlis, $a_n$, $a_{n-1}$, …, $a_1$, $a_0$ – patvaļīgi skaitļi ($a_n \neq 0$).

**Nultās pakāpes polinoms** ir konstante, kas nav vienāda ar nulli.

**Nulles polinoms** ir konstante, kas vienāda ar nulli.

Saka, ka polinoms $P(x)$ dalās bez atlikuma ar polinomu $S(x)$, ja eksistē tāds polinoms $Q(x)$, ka $Q(x) \cdot S(x) = P(x)$.

**Bezū teorēma.** Dalot polinomu $P(x)$ ar binomu $x - a$, atlikumā iegūst $P(a)$, t. i., skaitli, kas ir polinoma vērtība pie $x = a$.

*Secinājums.* Lai mainīgā $x$ $n$-tās pakāpes polinoms $P(x)$ dalītos bez atlikuma ar $x-a$, nepieciešami un pietiekami, lai skaitlis $a$ būtu šī polinoma sakne, t. i., lai būtu spēkā vienādība $P(a)=0$.

**Algebras pamatteorēma.** Polinomam $P_n(x)$ ir ne vairāk kā $n$ saknes.

Lai polinomu $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ sadalītu reizinātājos, bieži izmanto šādas teorēmas:

- Katru polinomu $P_n$ var sadalīt reizinātājos tā, lai katrs reizinātājs būtu pirmās vai otrās pakāpes polinoms.
- Ja $x=a$ ir polinoma $P_n$ sakne, tad $P_n$ dalās bez atlikuma ar binomu $x-a$ jeb polinoms $P_n$ satur reizinātāju $x-a$.
- Ja polinomam $P_n$ ir vesela sakne $x=a$, tad $a$ ir brīvā locekļa $a_0$ dalītājs.
- Lai racionāls skaitlis (nesaīsināma daļa $\frac{p}{q}$) būtu polinoma sakne (polinoma koeficienti ir veseli skaitļi), nepieciešams, lai $p$ būtu brīvā locekļa $a_0$ dalītājs, bet $q$ būtu $a_n$ dalītājs (t. i., $a_0$ dalītos bez atlikuma ar $p$, bet $a_n$ – ar $q$).

**Teorēma.** Starpība $P(x)-P(y)$ dalās ar ($x-y$), kur $P(x)=a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ un $a_i$, $i=0,1,...,n$, ir veseli skaitļi.

*Pierādījums.* Apskatām starpību

$$P(x)-P(y)=a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 - (a_n y^n + ... + a_1 y + a_0) = a_n(x^n - y^n) + ... + a_1(x-y).$$

Izmantojot formulu $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, kur $n$ – naturāls skaitlis, iegūstam, ka katrs saskaitāmais $a_i(x^i - y^i)$, $i=1,2,...,n$ dalās ar ($x-y$). Tātad arī starpība $P(x)-P(y)$ dalās ar ($x-y$), kas arī bija jāpierāda.

## Kvadrāttrinoms un kvadrātvienādojums

Polinomu, kuru var pierakstīt formā $ax^2+bx+c$, kur *a*, *b* un *c* – reāli nenulles skaitļi, sauc par **kvadrāttrinomu**.

Par **kvadrātvienādojumu** sauc vienādojumu $ax^2+bx+c=0$, kur *x* ir mainīgais, bet *a*, *b*, *c* ir reāli skaitļi ($a \neq 0$).

Skaitļus *a*, *b*, *c* sauc par kvadrātvienādojuma **koeficientiem**; $ax^2$ sauc par kvadrātisko locekli, $bx$ – lineāro locekli, *c* – brīvo locekli.

Kvadrātvienādojuma **sakņu aprēķināšana**:

- $x_{1,\,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, kur diskriminants $D=b^2-4ac$;
- **Vjeta teorēma**: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$;

Kvadrātvienādojuma **sakņu skaits** ir atkarīgs no diskriminanta $D=b^2-4ac$ vērtības:

- $D<0$ – vienādojumam nav reālu sakņu.
- $D=0$ – vienādojumam ir viena sakne jeb divas vienādas saknes $x=\dfrac{-b}{2a}$.
- $D>0$ – vienādojumam ir divas dažādas saknes $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Kvadrāttrinomu var **sadalīt reizinātājos** izmantojot formulu $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, kur $x_1$ un $x_2$ ir kvadrāttrinoma saknes.

Par **reducēto** kvadrātvienādojumu sauc kvadrātvienādojumu, kuram $a=1$.

Par **nepilno** kvadrātvienādojumu sauc kvadrātvienādojumu, kuram kāds no koeficientiem (izņemot *a*) ir vienāds ar nulli.

Ir trīs veidu nepilnie kvadrātvienādojumi:

- ja $b=0$, tad iegūst nepilno kvadrātvienādojumu $ax^2+c=0$ jeb $x^2=-\dfrac{c}{a}$:
  - ja $-\dfrac{c}{a}\geq 0$, tad $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$;
  - ja $-\dfrac{c}{a}<0$, tad vienādojumam nav reālu sakņu;
- ja $c=0$, tad iegūst nepilno kvadrātvienādojumu $ax^2+bx=0$ jeb $x(ax+b)=0$, kura saknes ir $x=0$ un $x=-\dfrac{b}{a}$;
- ja $b=0$ un $c=0$, tad iegūst nepilno kvadrātvienādojumu $ax^2=0$ jeb $x^2=0$, kura sakne ir $x=0$.

## Funkcijas

Funkciju $y=f(x)$ sauc par **pāra funkciju**, ja katram *x* no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x)=f(x)$. Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret *y* asi.

Funkciju $y = f(x)$ sauc par **nepāra funkciju**, ja katram $x$ no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība $f(-x) = -f(x)$. Nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumpunktu, t. i., punktu $(0; 0)$.

Funkciju sauc par **augošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) < f(x_2)$ jeb funkciju sauc par augošu, ja, palielinoties argumenta vērtībām, palielinās funkcijas vērtības.

Funkciju sauc par **nedilstošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkciju sauc par **dilstošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) > f(x_2)$ jeb funkciju sauc par dilstošu, ja, palielinoties argumenta vērtībām, samazinās funkcijas vērtības.

Funkciju sauc par **neaugošu**, ja katrām divām argumenta vērtībām, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Ja funkcija kādā intervālā ir tikai dilstoša vai tikai augoša, tad to sauc par **monotonu** funkciju.

Ja $f(x) = y$ un $g(u) = z$, tad funkciju $z = g(f(x))$, kur funkcijas $g$ arguments ir cita funkcija $f$, sauc par **saliktu** funkciju jeb funkciju kompozīciju.

**Funkciju vispārīgās īpašības:**

- ja funkcija $f$ ir augoša, tad funkcija $(-f)$ ir dilstoša;
- divu augošu funkciju summa ir augoša funkcija;
- divu augošu funkciju kompozīcija ir augoša funkcija;
- divu dilstošu funkciju kompozīcija ir augoša funkcija;
- augošas un dilstošas funkcijas kompozīcija ir dilstoša funkcija;
- pāra funkciju summa (reizinājums) ir pāra funkcija;
- divu nepāra funkciju reizinājums (dalījums) ir pāra funkcija;
- pāra un nepāra funkcijas reizinājums (dalījums) ir nepāra funkcija.

Funkcijas $f(x)$ krustpunkti ar $x$ asi ir vienādojuma $f(x) = 0$ saknes.

Funkciju $f(x)$ un $g(x)$ **grafiku krustpunktu *x* koordinātas** ir vienādojuma $f(x) = g(x)$ saknes.

**Lineārā funkcija:** $f(x) = kx + b$.

- Lineārās funkcijas grafiks ir taisne.
- Punkts $(0; b)$ ir lineārās funkcijas krustpunkts ar $y$ asi.
- Koeficientu $k$ sauc par taisnes virziena koeficientu.
- Ja $k > 0$, tad taisne ir augoša; ja $k < 0$, tad taisne ir dilstoša.
- Lineārās funkcijas definīcijas apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$ un vērtību apgabals ir intervāls $(-\infty; +\infty)$.
- Ja $b = 0$, tad lineāro funkciju sauc par tiešās proporcionalitātes funkciju.

**Kvadrātfunkcija:** $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Ja $a > 0$, tad kvadrātfunkcijas grafiks ir parabola, kurai zari vērsti uz augšu. Funkcijai ir vismazākā vērtība $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, kur $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ ir parabolas virsotnes $x$ koordināta.

- Ja $a < 0$, tad kvadrātfunkcijas grafiks ir parabola, kurai zari vērsti uz leju. Funkcijai ir vislielākā vērtība $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, kur $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ir parabolas virsotnes $x$ koordināta.
- Ja $D = b^2 - 4ac < 0$, tad kvadrātfunkcijas grafiks nekrusto $x$ asi.
- Punkts $(0; c)$ ir kvadrātfunkcijas grafika krustpunkts ar $y$ asi.

## Funkcionālvienādojumi

**Funkcionālvienādojumi** ir vienādojumi, kas kā mainīgo satur nezināmo funkciju.
**Risināšanas metodes:**
- dažādu vērtību ievietošana (piemēram, $x = 0$, $x = 1$, $x = y = 0$);
- substitūciju metode (jāievēro sākotnējais definīcijas apgabals);
- ekvivalentu pārveidojumu veikšana;
- nenoteikto koeficientu metode.

**Elementārās funkcijas:** Ja $f$ ir nepārtraukta funkcija, kas visiem $x, y \in R$ apmierina vienādību:
- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (Košī vienādība), tad $f(x) = Cx$, kur konstante $C = f(1)$;
- $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, tad $f(x) = C^x$, kur $C$ – konstante;
- $f(xy) = f(x) + f(y)$, tad $f(x) = C \ln x$, kur $C$ – konstante;
- $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, tad $f(x) = x^C$, kur $C$ – konstante;
- $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ (Jensena vienādība), tad $f(x) = C_1 x + C_2$, kur $C_1$, $C_2$ – konstantes.

## Klasiskās nevienādības

Izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs $a^2 \geq 0$.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo ģeometrisko** $A \geq G$:
$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ jeb $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ visiem $a_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n$.
*Secinājumi*:
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$;
- $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo kvadrātisko** $Q \geq A$:
$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Sakarība starp **vidējo aritmētisko** un **vidējo harmonisko** $A \geq H$ :

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \text{ visiem } a_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n .$$

<u>*Piezīme.*</u> $Q \geq A \geq G \geq H$ .

**Košī-Buņakovska nevienādība:**

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 ,$$

kur $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir patvaļīgi skaitļi.

## Progresijas

Virkni, kurā katru nākamo locekli iegūst iepriekšējam pieskaitot vienu un to pašu skaitli, sauc par **aritmētisko progresiju**. Šo skaitli sauc par aritmētiskās progresijas **diferenci** un apzīmē ar *d*: $a_{n+1} = a_n + d$ .

Lai definētu aritmētisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un diferenci.

Lai aprēķinātu virknes *n*-to locekli, lieto formulu $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Aritmētiskās progresijas pirmo *n* locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Virkni, kuras katru nākamo locekli iegūst, iepriekšējo locekli reizinot ar vienu un to pašu nenulles skaitli, sauc par **ģeometrisko progresiju**. Šo skaitli sauc par ģeometriskās progresijas **kvocientu** *q*: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ .

Lai definētu ģeometrisko progresiju, pietiek norādīt virknes pirmo locekli un kvocientu.

Lai aprēķinātu virknes *n*-to locekli, lieto formulu $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

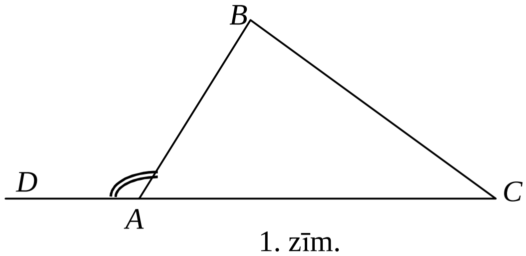
Ģeometriskās progresijas pirmo *n* locekļu summu aprēķina pēc formulas $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$ .

Ja $|\, q \,| < 1$, tad ģeometrisko progresiju sauc par **bezgalīgi dilstošu ģeometrisko progresiju** un tās visu locekļu summu aprēķina pēc formulas $S = \frac{b_1}{1-q}$ .

# ĢEOMETRIJA

## Trijstūri

Trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$.
Par **trijstūra ārējo leņķi** sauc trijstūra iekšējā leņķa blakusleņķi.
Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķis (skat. 1. zīm.).




$\angle BAD = \angle ABC + \angle BCA$

1. zīm.

Pret garāku trijstūra malu atrodas lielāks trijstūra leņķis un otrādi.

Divus trijstūrus sauc par **vienādiem**, ja tos var uzlikt vienu uz otra tā, ka tie pilnīgi sakrīt. Ja trijstūris *ABC* ir vienāds ar trijstūri $A'B'C'$, tad raksta $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.
**Trijstūru vienādības pazīmes**:

- „*mmm*” – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi vienādas ar otra trijstūra trim malām;
- „$m\ell m$” – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra divas malas un leņķis starp tām ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām;
- „$\ell m\ell$” – divi trijstūri ir vienādi, ja viena trijstūra mala un tās pieleņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra malu un tās pieleņķiem.

Divus trijstūrus sauc par **līdzīgiem**, ja to atbilstošās malas ir proporcionālas un atbilstošie leņķi ir vienādi. Ja trijstūris *ABC* ir līdzīgs trijstūrim $A'B'C'$, tad raksta $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
Līdzīgu trijstūru atbilstošo malu garumu attiecību sauc par **līdzības koeficientu**.
**Trijstūru līdzības pazīmes**:

- „*mmm*” – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra trīs malas ir attiecīgi proporcionālas ar otra trijstūra trim malām;
- „$m\ell m$” – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divas malas ir proporcionālas otra trijstūra divām malām un leņķi starp tām ir vienādi;
- „$\ell\ell$” – divi trijstūri ir līdzīgi, ja viena trijstūra divi leņķi ir attiecīgi vienādi ar otra trijstūra diviem leņķiem.

Līdzīgu trijstūru perimetru attiecība ir vienāda ar atbilstošo malu attiecību (līdzības koeficientu *k*), bet laukumu attiecība ir vienāda ar atbilstošo trijstūra malu attiecības kvadrātu (līdzības koeficienta kvadrātu $k^2$), t. i., ja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, tad

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{P(ABC)}{P(A'B'C')} = k, \qquad \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = k^2$$

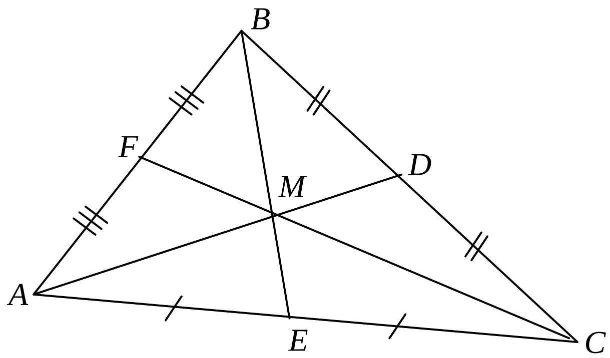
Līdzīgu trijstūru atbilstošo bisektrišu, mediānu, viduslīniju un citu atbilstošo nogriežņu garumu attiecība ir vienāda ar šo trijstūru līdzības koeficientu *k*.

Nogriezni, kas savieno trijstūra divu malu viduspunktus, sauc par trijstūra **viduslīniju**.
**Viduslīnijas īpašības:**

- trijstūra viduslīnija ir paralēla vienai no trijstūra malām;
- trijstūra viduslīnijas garums ir vienāda ar pusi no tai paralēlās trijstūra malas;
- trijstūra viduslīnija no dotā trijstūra atšķeļ trijstūri, kas līdzīgs dotajam trijstūrim ar līdzības koeficientu $k = \frac{1}{2}$.

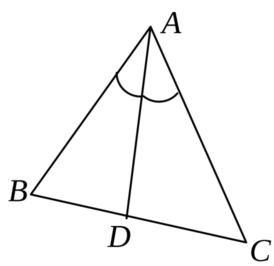
Par **trijstūra augstumu** sauc nogriezni, kas savieno trijstūra virsotni ar tai pretējo malu (vai pretējās malas pagarinājumu) un ar to veido taisnu leņķi. Trijstūra augstumi krustojas vienā punktā.

Par **trijstūra mediānu** sauc nogriezni, kas savieno trijstūra virsotni ar tai pretējās malas viduspunktu.
**Trijstūra mediānu īpašība.** Trijstūra mediānas krustojas vienā punktā, un krustpunkts katru mediānu dala attiecībā 2:1, skaitot no trijstūra virsotnes, t. i., $\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = \frac{2}{1}$, kur $M$ – mediānu krustpunkts (skat. 2. zīm.).




2. zīm.

Par **bisektrisi** sauc taisni, kas sadala leņķi divās vienādās daļās.
Par **trijstūra bisektrisi** sauc trijstūra leņķa bisektrises nogriezni, kas atrodas trijstūra iekšpusē. Trijstūra bisektrises krustojas vienā punktā.
**Trijstūra bisektrises īpašība.** Trijstūra leņķa bisektrise sadala pretējo malu nogriežņos, kuru attiecība ir vienāda ar šim leņķim atbilstošo piemalu attiecību, t. i., $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (skat. 3. zīm.).

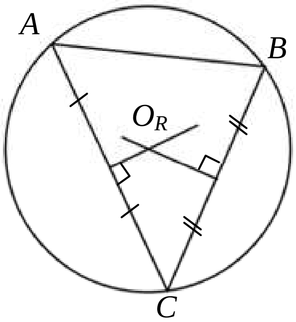



3. zīm.

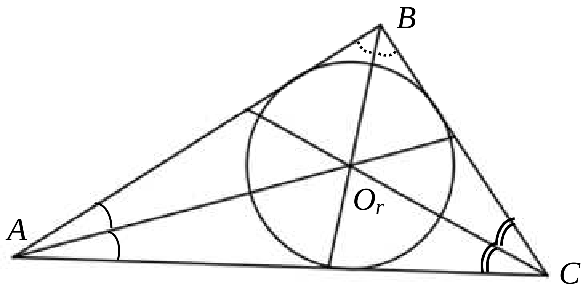
Par nogriežņa **vidusperpendikulu** sauc taisni, kas iet caur dotā nogriežņa viduspunktu un ir perpendikulāra dotajam nogrieznim.
**Vidusperpendikula īpašība.** Nogriežņa vidusperpendikula jebkurš punkts atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem.

Jebkurš punkts, kas atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem, atrodas uz nogriežņa vidusperpendikula.

Trijstūra malu vidusperpendikulu krustpunkts ir **trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs** (skat. 4. zīm.), bet trijstūra bisektrišu krustpunkts ir **trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs** (skat. 5. zīm.).



4. zīm.



5. zīm.

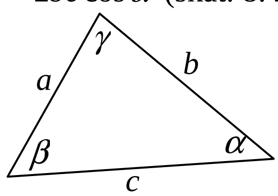
**Trijstūra laukuma** aprēķināšanas formulas:

- $S_\Delta = \dfrac{ah_a}{2}$;
- $S_\Delta = p \cdot r$;
- $S_\Delta = \dfrac{abc}{4R}$;
- $S_\Delta = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, kur $\gamma$ – leņķis starp malām *a* un *b*;
- $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Hērona formula),

kur *a*, *b*, *c* – trijstūra malas, $h_a$ – augstums, kas novilkts pret malu *a*, *p* – pusperimetrs, *r* – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, *R* – apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

**Sinusu teorēma**: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (skat. 8. zīm.).

**Kosinusu teorēma**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (skat. 8. zīm.).



8. zīm.

**Nevienādības trijstūros**

Trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā pārējo divu malu garumu summa un katras trijstūra malas garums ir lielāks nekā abu pārējo divu malu garumu starpība, t. i., ja *a*, *b*, *c* – trijstūra malu garumi, kur $a \le b \le c$, tad $a + b > c$ un $c - b < a$.

Trijstūra mediāna ir mazāka nekā malu, starp kurām tā atrodas, pussumma, t. i., $m_a < \dfrac{b+c}{2}$, kur $m_a$ – mediāna, kas novilkta pret malu *a*.

Par **vienādsānu trijstūri** sauc trijstūri, kura divas malas ir vienādas. Vienādās trijstūra malas sauc par sānu malām, bet trešo malu – par pamatu.

Vienādsānu trijstūrī leņķi pie pamata ir vienādi.
Augstums, kas novilkts pret trijstūra pamatu, ir arī šī trijstūra mediāna un bisektrise.
Ja nogrieznis ir trijstūra augstums un bisektrise, tad tas ir arī trijstūra mediāna un šis trijstūris ir vienādsānu.

**Regulārs (vienādmalu) trijstūris**

Par **regulāru (vienādmalu) trijstūri** sauc trijstūri, kuram visas malas ir vienādas. Regulāra trijstūra visi leņķi ir vienādi, t. i., $60°$ lieli.
Vienādmalu trijstūrī katra mediāna ir arī bisektrise un augstums.

Regulāra trijstūra laukums: $S_{\Delta} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, kur $a$ ir trijstūra malas garums.

Regulāra trijstūra augstums: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

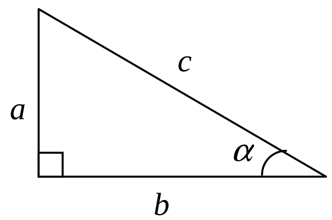
Regulārā trijstūrī ievilktās riņķa līnija rādiuss: $r = \dfrac{1}{3}h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Regulāram trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss: $R = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Taisnleņķa trijstūris**

**Pitagora teorēma.** Taisnleņķa trijstūrī katešu garumu kvadrātu summa ir vienāda ar hipotenūzas garuma kvadrātu, t. i., $a^2 + b^2 = c^2$, kur $a$ un $b$ ir katešu garumi un $c$ – hipotenūzas garums.
**Trigonometriskās sakarības** taisnleņķa trijstūrī (skat. 9. zīm):

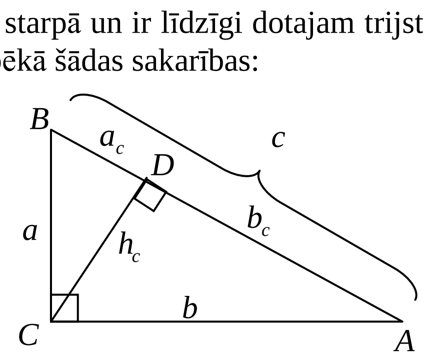
- $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$;
- $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$;
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$;
- $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a}{b}$.



9. zīm.

No taisnleņķa trijstūra taisnā leņķa virsotnes novilktais augstums $h_c$ sadala trijstūri divos taisnleņķa trijstūros, kas ir līdzīgi savā starpā un ir līdzīgi dotajam trijstūrim, t. i., $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$ (skat. 10. zīm.). Ir spēkā šādas sakarības:

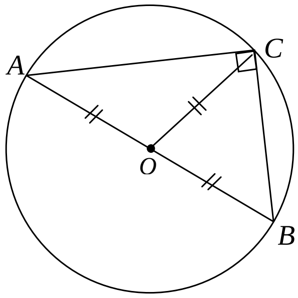
- $h_c^2 = a_c \cdot b_c$;
- $a^2 = a_c \cdot c$;
- $b^2 = b_c \cdot c$;
- $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{a_c}{b_c}$.



10. zīm.

Ap taisnleņķa trijstūri apvilktas riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā, un tās rādiusa garums ir vienāds ar pusi no hipotenūzas garuma.

Taisnleņķa trijstūra mediāna, kas novilkta no taisnā leņķa virsotnes, ir vienāda ar trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusu, t. i., ar pusi no hipotenūzas (skat. 11. zīm.).



11. zīm.

## Riņķis un riņķa līnija

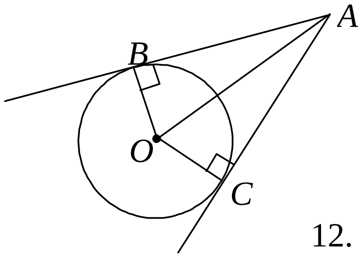
Par **riņķa līniju** sauc ir visu to plaknes punktu kopu, kuri atrodas vienādā attālumā no kāda fiksēta plaknes punkta. Šo punktu sauc par riņķa līnijas **centru**, bet attiecīgo attālumu — par riņķa līnijas **rādiusu**.
Visi riņķa līnijas rādiusi ir vienādi savā starpā.
Par **riņķi** sauc plaknes daļu, ko ierobežo riņķa līnija un kurā atrodas tās centrs.
Par riņķa līnijas **pieskari** sauc taisni, kurai ar riņķa līniju ir tieši viens kopīgs punkts.
Par **hordu** sauc nogriezni, kas savieno divus riņķa līnijas punktus.
Jo tuvāk horda atrodas riņķa līnijas centram, jo tā ir garāka.
Par **diametru** sauc hordu, kas iet caur riņķa līnijas centru.
Par **sekanti** sauc taisni, kas krusto riņķa līniju divos dažādos punktos.
Par riņķa līnijas **loku** sauc riņķa līnijas daļu starp diviem tās punktiem. Jebkuru loku pilnībā raksturo divi lielumi: loka rādiuss un leņķis.
Vienādas hordas balstās uz vienādiem lokiem.
Loki starp vienas riņķa līnijas divām paralēlām hordām ir vienādi.
Par **sektoru** sauc riņķa daļu, kas atrodas starp diviem rādiusiem.
Par **segmentu** sauc riņķa daļu, ko no riņķa atšķeļ horda.

**Ar riņķi un riņķa līniju saistītās formulas:**

- $D = 2R$, kur $D$ – diametrs un $R$ – riņķa līnijas rādiuss;
- riņķa laukums: $S = \pi R^2$;
- sektora laukums: $S_{sektora} = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360°}$, kur $\alpha$ – sektora centra leņķa lielums grādos;
- riņķa līnijas garums: $C = 2\pi R$;
- riņķa līnijas loka garums: $l_{loka} = \dfrac{\pi R \alpha}{180°}$, kur $\alpha$ – lokam atbilstošā centra leņķa lielums grādos.

Caur jebkuru punktu *A*, kas atrodas ārpus riņķa līnijas, var novilkt tieši divas pieskares. Ja punkti *B* un *C* – šo pieskaru pieskaršanās punkti un *O* – attiecīgās riņķa līnijas centrs (skat. 12. zīm.), tad

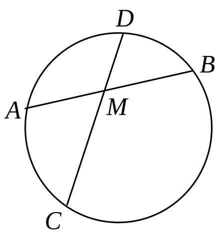
- $AB = AC$ ( pieskaru nogriežņi, kas novilkti no viena punkta, ir vienādi);
- $\angle BAO = \angle CAO$;
- $OB \perp AB$.




12. zīm.

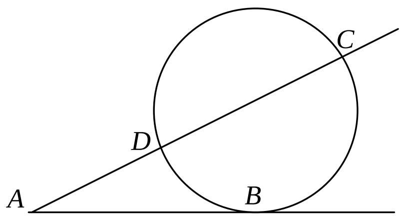
**Metriskās sakarības riņķa līnijā**

**Hordu īpašība**



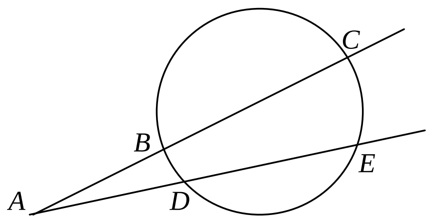

$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

**Pieskares – sekantes īpašība**



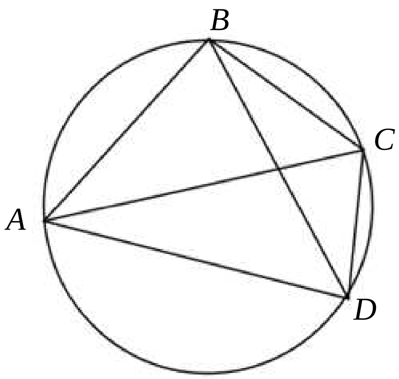

$AB^2 = AC \cdot AD$

**Sekanšu īpašība**




$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

**Ptolemaja teorēma.** Ja četrstūris *ABCD* ir ievilkts riņķa līnijā, tad $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.




Spēkā ir arī Ptolemaja teorēmas apgrieztā teorēma.

**Leņķi riņķa līnijā**

Par **centra leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, bet malas krusto riņķa līniju.

Centra leņķa lielums ir vienāds ar tā loka, uz kura tas balstās, leņķisko lielumu, t. i., $\angle AOB = \cup AmB$ (skat. 13. zīm.).

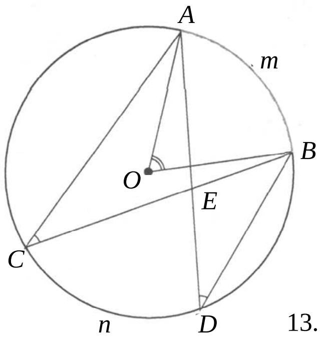
Par riņķa līnijā **ievilktu leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, bet malas krusto riņķa līniju.

Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka, uz kura tas balstās, leņķiskā lieluma, t. i., $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AmB$ (skat. 13. zīm.).

Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi, piemēram, $\angle ACB = \angle ADB$ (skat. 13. zīm.).

Leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas vienāda garuma hordām, ir vienādi, un otrādi.

Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra, ir $90°$ un otrādi – ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametru.



13. zīm.

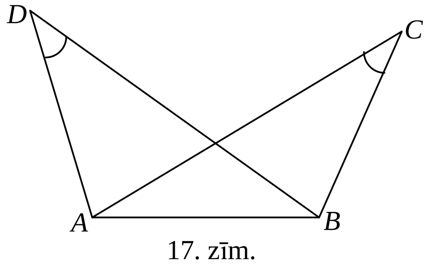
Par **hordas - pieskares leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, viena tā mala satur hordu, bet otra mala atrodas uz pieskares.
Hordas - pieskares leņķis ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, kuru ietver leņķa malas.
Par riņķa līnijas **ārējo leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas ārpus riņķa un tā malas krusto riņķa līniju vai arī viena vai abas malas pieskaras riņķa līnijai.
Ārējā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no to divu loku leņķisko lielumu starpības, kuri atrodas starp leņķa malām.
Par riņķa līnijas **iekšējo leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa iekšpusē, bet malas krusto riņķa līniju.
Iekšējā leņķa lielums jeb leņķa lielums starp divām hordām ir vienāds ar to divu loku, no kuriem viens ir starp leņķa malām, bet otrs ir starp leņķa malu pagarinājumiem, leņķisko lielumu pussummu, t. i., $\angle CED = \dfrac{\cup CnD + \cup AmB}{2}$ (skat. 13. zīm.).

## Ievilkti un apvilkti četrstūri

Par riņķa līnijā **ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas. Attiecīgi, riņķa līniju sauc par četrstūrim apvilktu riņķa līniju.
Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā.

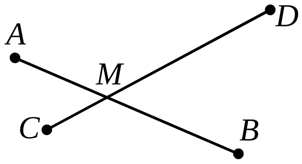
**Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja:**

- četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir $180°$;
- izpildās vienādība $\angle ACB = \angle BDA$ (skat. 17. zīm.);



17. zīm.

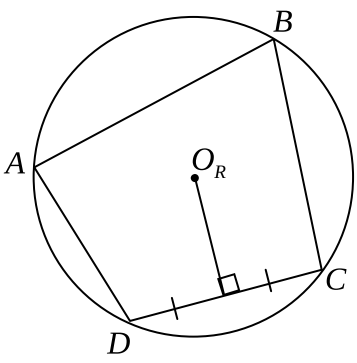
- ir spēkā vienādība $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, kur $M$ ir nogriežņu $AB$ un $CD$ krustpunkts (skat. 18. zīm.).



18. zīm.

Par riņķa līnijai **apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai. Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrī ievilktu riņķa līniju.
Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra leņķu bisektrišu krustpunktā.
Izliektu četrstūri var apvilkt ap riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo malu garumu summas ir vienādas.

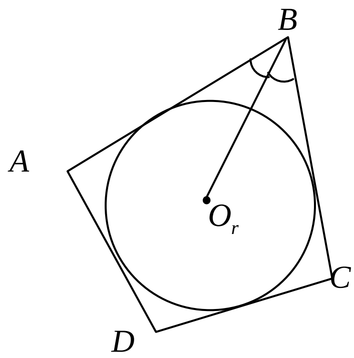
**Ievilkts četrstūris**




$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$

$O_R$ – malu vidusperpendikulu krustpunkts

**Apvilkts četrstūris**




$AB + CD = AD + BC$

$O_r$ – leņķu bisektrišu krustpunkts

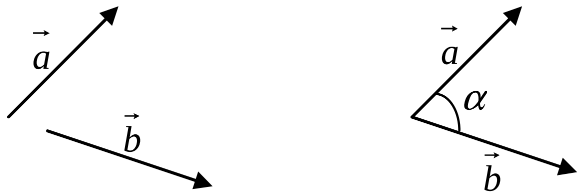
## Vektori

Par **vektoru** sauc orientētu nogriezni.
Par nulles vektoru sauc vektoru, kuram sakrīt sākuma punkts un beigu punkts, t. i., jebkurš punkts ir nulles vektors.
Par nenulles vektora $\vec{a}$ **garumu** jeb **moduli** sauc nogriežņa *a* garumu un apzīmē ar $|\vec{a}|$.

Ja dots vektors $\vec{a} = (a_x, a_y)$, tad $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ .

Par nenulles vektora **virzienu** sauc tās taisnes virzienu, uz kuras šis vektors atrodas.
Par nenulles vektora **vērsumu** sauc stara, uz kura atrodas vektors un kura sākumpunkts sakrīt ar vektora sākumpunktu, vērsumu.

Par **kolineāriem** vektoriem sauc vektorus, kas ir savstarpēji paralēli.
Par **vienādiem** vektoriem sauc kolineārus vektorus, kuriem ir vienādi garumi un vienādi vērsumi.
Par **pretējiem** vektoriem sauc divus kolineārus vektorus, kuru garumi vienādi, bet vērsumi pretēji.
Dotajam vektoram pretējo vektoru apzīmē, mainot dotā vektora zīmi vai mainot vietām burtus (piemēram, $\vec{a}$ pretējais vektors ir $-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ pretējais vektors ir $-\overrightarrow{AB}$ jeb $\overrightarrow{BA}$).
Par **leņķi starp diviem nenulles vektoriem** sauc leņķi starp šo vektoru virzieniem (skat. 19. zīm.).




19. zīm.

Par **perpendikulāriem** jeb **ortogonāliem** vektoriem (raksta $\vec{a} \perp \vec{b}$) sauc divus vektorus, starp kuriem leņķis ir $90°$.

Par divu vektoru **skalāro reizinājumu** sauc šo vektoru garumu reizinājumu ar kosinusu no leņķa starp vektoriem:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, kur $\alpha$ – leņķis starp vektoriem.

Ja doti vektori $\vec{a} = (a_x, a_y)$ un $\vec{b} = (b_x, b_y)$, tad šo vektoru skalāro reizinājumu var aprēķināt pēc formulas: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

No skalārā reizinājuma definīcijas var izteikt vektoru veidotā leņķa kosinusu: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Vektora reizinājums ar skaitli ir vektors, bet divu vektoru skalārais reizinājums ir skaitlis.

No skalārā reizinājuma definīcijas izriet, ka divu vienādi vērstu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar to garumu reizinājumu: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 1 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Divu vienādu un vienādi vērstu vektoru skalāro reizinājumu sauc par skalāro kvadrātu un tas ir vienāds ar vektora garuma kvadrātu: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Divu no nulles atšķirīgu vektoru skalārais reizinājums ir nulle tad un tikai tad, ja šie vektori ir savstarpēji perpendikulāri:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 .$$

# SKAITĻU TEORIJA

## Skaitļu iedalījums

- *N* – naturālie skaitļi: 1, 2, 3, 4, ...
- *Z* – veselie skaitļi: ..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...
- *Q* – racionālie skaitļi: visi skaitļi, kurus var uzrakstīt formā $\frac{m}{n}$, kur $m \in Z$ un $n \in N$.
- *I* – iracionālie skaitļi: bezgalīgi neperiodiski decimāldaļskaitļi (piemēram, $\sqrt{2}$, $e$, $\pi$).
- *R* – reālie skaitļi: racionālie skaitļi *Q* un iracionālie skaitļi *I*.

**Skaitļa pieraksts:**

- $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, kur *a*, *b* un *c* ir cipari;
- $2n$ – pāra skaitlis;
- $2n+1$ – nepāra skaitlis;
- $3n$ – skaitlis, kas dalās ar 3;
- $3n+1$ – skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1;
- $10n$ – skaitlis, kas beidzas ar 0.

## Dalāmība

Par vesela skaitļa *b* **dalītāju** sauc veselu skaitli *a*, ja eksistē tāds vesels skaitlis *c*, ka $ac = b$. Skaitli *b* sauc par skaitļa *a* **dalāmo** jeb **daudzkārtni**, bet *a* – par skaitļa *b* **dalītāju**.

Ja skaitlis *b* dalās ar skaitli *a*, tad to apzīmē ar $a \mid b$ vai $b \vdots a$.

**Dalāmības īpašības** (*a*, *b*, *c*, *d* un *n* ir veseli skaitļi):

- $0 \vdots a$, $a \vdots \pm 1$, $a \vdots a$;
- ja $a \vdots b$ un $b \vdots c$, tad $a \vdots c$;
- ja $a \vdots c$, tad $ab \vdots c$;
- ja $a \vdots c$ un $b \vdots c$, tad $ax + by \mid c$ jebkuriem veseliem skaitļiem *x* un *y*;
- ja $a \vdots b$ un $b \vdots a$, tad $a = \pm b$;
- ja $a \vdots b$ un $c \vdots d$, tad $ac \vdots bd$;
- ja $ac \vdots bc$, tad $a \vdots b$;
- ja $a \vdots b$ un $a, b > 0$, tad $b \le a$;
- ja $a \cdot b = c$, tad $c \vdots a$ vai $c \vdots b$;
- ja divi skaitļi *a* un *b* dod vienādus atlikumus, dalot tos ar *c*, tad šo skaitļu starpība $a - b$ dalās ar *c*;
- skaitlis dalās ar $n = a \cdot b$ (*a* un *b* – savstarpēji pirmskaitļi), ja tas dalās gan ar *a*, gan ar *b*.

**Dalāmības pazīmes:**

- skaitlis dalās ar 2, ja tas beidzas ar pāra ciparu;
- skaitlis dalās ar 3, ja tā ciparu summa dalās ar 3;
- skaitlis dalās ar 4, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4;
- skaitlis dalās ar 5, ja tas beidzas ar ciparu 0 vai 5;

- skaitlis dalās ar 6, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3;
- skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8;
- skaitlis dalās ar 9, ja tā ciparu summa dalās ar 9;
- skaitlis dalās ar 10, ja tā pēdējais cipars ir 0;
- skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

**Naturālo skaitļu īpašības:**

- No diviem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 2.
- No trijiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3.
- No *k* pēc kārtas ņemtiem skaitļiem viens noteikti dalās ar *k*.

**Skaitļa sadalījums pirmreizinātājos**

Par **pirmskaitli** sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dalītāji: 1 un pats skaitlis.
Tā kā 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad 1 nav pirmskaitlis.
Pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz.
Pirmie pirmskaitļi ir šādi:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ... .

Par **saliktu skaitli** sauc skaitli, kuram ir vairāk nekā divi dalītāji.

**Aritmētikas pamatteorēma.** Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu (reizinātāju secību neņem vērā).

Naturālam skaitlim $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, kur $p_i, i = 1, 2, \dots, m$ ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_m+1)$ dažādi dalītāji, šo dalītāju summa ir $(1+p_1+\dots+p_1^{k_1})(1+p_2+\dots+p_2^{k_2})\dots(1+p_m+\dots+p_m^{k_m})$.
Ja $p$ ir pirmskaitlis un $p|ab$, tad $p|a$ vai $p|b$.

**Fermā mazā teorēma.** Ja *p* ir pirmskaitlis un *a* nedalās ar *p*, tad $a^{p-1}-1$ dalās ar *p*.

**Fermā lielā teorēma.** Vienādojumam $x^n + y^n = z^n$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos, ja $n > 2$.

Salikta skaitļa *n* mazākais dalītājs nepārsniedz $\sqrt{n}$.
Naturāls skaitlis $n > 1$ nav pirmskaitlis tad un tikai tad, ja eksistē tāds skaitļa *n* dalītājs $m > 1$, kurš nepārsniedz $\sqrt{n}$.
*Secinājums.* Lai pierādītu, ka dotais skaitlis *n* ir pirmskaitlis vai salikts skaitlis, jāpārbauda, vai tas dalās ar skaitļiem no 1 līdz $\sqrt{n}$ ieskaitot.

**Skaitļa $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ īpašības:**

- Visi naturālie skaitļi, kas nepārsniedz *n*, ir *n*! dalītāji.
- Visi skaitļa $n!+1$ naturālie dalītāji (izņemot vieninieku) ir lielāki nekā *n*.
- Visi skaitļi intervālā $[n!+2; n!+n]$ ir salikti skaitļi.

Par divu vai vairāk veselu skaitļu **lielāko kopīgo dalītāju** sauc lielāko naturālo skaitli, ar kuru katrs no dotajiem skaitļiem dalās bez atlikuma. Divu skaitļu *a* un *b* lielāko kopīgo dalītāju apzīmē ar $LKD(a, b)$.
Skaitļus *a* un *b* sauc par **savstarpējiem pirmskaitļiem**, ja $LKD(a, b) = 1$.

Operācijai *LKD* piemīt šādas īpašības (*a*, *b*, *c* un *m* ir naturāli skaitļi):

- $LKD\,(a,\,a) = a$.
- $LKD\,(a, 1) = 1$ (jebkurš naturāls skaitlis ir savstarpējs pirmskaitlis ar skaitli 1).
- $LKD\,(a,\,b) = LKD\,(b,\,a)$.
- $LKD\,(a,\,a+1) = 1$ (secīgi naturāli skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi).
- $LKD\,(ma,\,mb) = m \cdot LKD\,(a,\,b)$.
- $LKD\,(a,\,b) = LKD\,(a,\,ac+b)$
- Ja *a* un *b* dalās ar *m*, tad $LKD\,(a,\,b)$ arī dalās ar *m*.
- $LKD\left(\frac{a}{m},\,\frac{b}{m}\right) = \frac{LKD\,(a,\,b)}{m}$.
- $LKD\,(a^m,\,b^m) = \left(LKD\,(a,\,b)\right)^m$.
- $LKD\,(a^x,\,a^y) = a^{\min(x,\,y)}$.

Lielāko kopīgo dalītāju var atrast ar **Eiklīda algoritmu**, kas balstīts uz dalīšanu ar atlikumu: vispirms nepilni izdala lielāko skaitli ar mazāko un tad katrā nākamajā solī iepriekšējās darbības dalītāju dala ar iegūto atlikumu. Lielākais kopīgais dalītājs ir pēdējais iegūtais nenulles atlikums.

Par divu vai vairāk veselu skaitļu **mazāko kopīgo dalāmo** sauc mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar katru no dotajiem skaitļiem bez atlikuma. Divu skaitļu *a* un *b* mazāko kopīgo dalāmo apzīmē ar $MKD\,(a,\,b)$.

Operācijai *MKD* piemīt šādas īpašības (*a*, *b*, *c* un *m* ir naturāli skaitļi):

- $MKD\,(a,\,a) = a$.
- $MKD\,(a,\,b) = MKD\,(b,\,a)$.
- $MKD\,(ma,\,mb) = m \cdot MKD\,(a,\,b)$.
- Ja *a* vai *b* dalās ar *m*, tad $MKD\,(a,\,b)$ arī dalās ar *m*.
- Ja gan *a*, gan *b* dalās ar *m*, tad $MKD\left(\frac{a}{m},\,\frac{b}{m}\right) = \frac{MKD\,(a,\,b)}{m}$.
- $MKD\,(a^m,\,b^m) = \left(MKD\,(a,\,b)\right)^m$.
- $MKD\,(a^x,\,a^y) = a^{\max(x,\,y)}$.
- $MKD\,(a,\,b) = \frac{ab}{LKD\,(a,\,b)}$ jeb $MKD\,(a,\,b) \cdot LKD\,(a,\,b) = ab$.

## Kongruence

Ja *a* un *m*, $m \neq 0$, ir veseli skaitļi, tad atlikums, ko iegūst, *a* dalot ar *m*, ir tāds vesels skaitlis *r*, ka $a = q \cdot m + r$, kur *q* ir vesels skaitlis un $0 < |r| < |m|$. Šajā gadījumā iespējami divi dažādi atlikumi. Ja, *a* dalot ar *m*, $r_1$ ir pozitīvs atlikums un $r_2$ – negatīvs, tad $r_1 = r_2 + m$.

Ja *a* un *m* ir naturāli skaitļi, tad atlikums, ko iegūst skaitli *a* dalot ar *m*, ir vesels skaitlis robežās no 0 līdz $m-1$.

Divi skaitļi *a* un *b* ir **kongruenti pēc moduļa *m*** (apzīmē ar pierakstu $a \equiv b \pmod{m}$), kur $m \neq 0$, tad un tikai tad, ja $a-b$ dalās ar *m* jeb skaitļi *a* un *b* dod vienādu atlikumu, ja tos dala ar *m*.

**Kongruences īpašības:**

- jebkuram *m* izpildās vienādība: $a \equiv a \pmod{m}$;

- $a \equiv b \pmod{m}$ tad un tikai tad, ja $a \equiv b \pmod{(-m)}$;
- ja $m = \pm 1$, tad jebkuriem diviem skaitļiem $a$ un $b$ izpildās vienādība $a \equiv b \pmod{m}$, t. i., visi veselie skaitļi ir kongruenti pēc moduļa 1;
- ja $m \vdots m_1$ un $a \equiv b \pmod{m}$, tad $a \equiv b \pmod{m_1}$;
- ja $a \equiv b \pmod{m}$, tad $ka \equiv kb \pmod{m}$, kur $k$ ir vesels skaitlis;
- ja $a \equiv b \pmod{m}$ un $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, tad $a + a_1 \equiv b + b_1 \pmod{m}$, $a - a_1 \equiv b - b_1 \pmod{m}$ un $aa_1 \equiv bb_1 \pmod{m}$.

*Secinājums.* Ja $f(a_1, a_2, ..., a_k)$ ir patvaļīga vesela izteiksme un $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, ... , $a_k \equiv b_k \pmod{n}$, tad

$$f(a_1, a_2, ..., a_k) \equiv f(b_1, b_2, ..., b_k) \pmod{n}.$$

Tas nozīmē, ka, veicot aprēķinus pēc moduļa *n*, jebkuru skaitli izteiksmē var aizvietot ar jebkuru citu tam kongruentu skaitli. Parasti skaitli *a* aizvieto ar skaitļa *a* atlikumu pēc moduļa *n*, bet atsevišķos gadījumos var ņemt citu tam kongruentu skaitli.

**Teorēma.** Virkne $x_n = a^n$ pēc moduļa $m$ ir periodiska.

Perioda garumu un tajā ietilpstošos skaitļus var atrast, rakstot pēc kārtas skaitļus $a^n$ pēc moduļa *m*. Tiklīdz virknē $a^n \pmod{m}$ parādās vienādi skaitļi, mēs esam atraduši periodu. Perioda garums nepārsniedz *m*.

# KOMBINATORIKA

**Saikļu lietojums:**

- saiklis „un” nozīmē, ka **visām** uzdevumā minētajām īpašībām vai nosacījumiem **jāizpildās vienlaicīgi**;
- saiklis „vai” nozīmē, ka **jāizpildās vismaz vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam (bet vienlaicīgi var izpildīties arī vairākas īpašības vai nosacījumi);
- saiklis „vai nu ... , vai” nozīmē, ka **jāizpildās tieši vienai** minētajai īpašībai vai nosacījumam.

Kombinatorikas **saskaitīšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties attiecīgi $n_1, n_{2,}\ n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas **vai nu** viena, **vai** otra, **vai** trešā utt. veida objekti, tad to var izdarīt pavisam $M = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ veidos.
Kombinatorikas **reizināšanas likums**:
Ja ir vairāku veidu objekti, pie tam katra veida objektus var izvēlēties $n_1, n_{2,}\ n_3, \ldots$ veidos, un ja ir jāizvēlas pa vienam objektam no pirmā veida **un** otrā veida, **un** trešā veida utt., tad to pavisam var izdarīt $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$ veidos.

Par **permutāciju** sauc visu doto elementu sakārtojumu rindā.
Ja $n$ dažādi elementi jāsakārto rindā, tad to var izdarīt $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ dažādos veidos.

Par **variācijām** no $n$ elementiem pa $k$ elementiem katrā sauc izlases, kurās ir tieši $k$ dotās kopas elementi un kuras atšķiras cita no citas vai nu ar elementu sastāvu, vai to izkārtojumu izlasē.
Visu variāciju skaitu no $n$ elementiem pa $k$ elementiem apzīmē ar simbolu $A_n^k$. Variāciju skaitu aprēķina pēc formulas:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Par **kombinācijām** no $n$ elementiem pa $k$ elementiem katrā sauc tādas izlases, kurās ir tieši $k$ dotās kopas elementi un kuras atšķiras cita no citas vismaz ar vienu elementu.
Kombinācijās elementu izkārtojums neņem vērā, t. i., divas kombinācijas, kurās ir vienāds elementu sastāvs, tiek uzskatītas par vienādām.
Kombināciju skaitu no $n$ dažādiem elementiem pa $k$ elementiem apzīmē ar simbolu $C_n^k$.
Kombināciju skaitu aprēķina pēc formulām:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1};$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

*Secinājums.* $A_n^k \geq C_n^k$.

**Kombināciju skaita īpašības:**

- $C_n^k = C_n^{n-k}$;
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$;
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, ja $0 < k < n$.

**Paskāla trijstūris:**

$$C_0^0 = 1$$
$$C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1$$
$$C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1$$
$$C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$$
$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4 \quad C_4^4 = 1$$
$$... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...$$
$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad ... \quad ... \quad ... \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$$

**Ņūtona binoma formula:**

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n.$$

## Vidējās vērtības metode

Uzdevumu risināšana balstās uz konkrēti formulētām teorēmām, piemēram,

- Starp jebkuriem *n* skaitļiem ir vismaz viens skaitlis, kas nav mazāks par to vidējo vērtību, un ir vismaz viens skaitlis, kas nav lielāks par to vidējo vērtību.
- Ja starp lielumiem ir kāds lielums, kas ir lielāks par visu lielumu vidējo vērtību, tad starp tiem ir arī tāds lielums, kas mazāks par visu lielumu vidējo vērtību, un otrādi.
- Ja neviens no lielumiem nav mazāks (vai lielāks) par visu lielumu vidējo vērtību, tad tie visi ir vienādi ar savu vidējo aritmētisko.

Viens no Vidējās vērtības metodes speciālgadījumiem ir **Dirihlē princips**: ja vairāk nekā *n* truši jāizvieto *n* būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši.
**Vispārinātais Dirihlē princips**: ja vairāk nekā $m \cdot n$ truši jāizvieto *n* būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz $m+1$ trusis.

Katrā uzdevumā *truši* un *būri* var būt dažādi lielumi, piemēram, *truši* var būt skaitļi, cilvēki utt., *būri* – īpašības, pēc kurām *truši* sadalās vairākās grupās; īpašībām jābūt tādām, ka katram *trusim* piemīt tieši viena no tām (katrs *trusis* var nonākt **tikai vienā** būrī un neviens *trusis* nedrīkst palikt ārpus *būriem*).

## Invariantu metode

Vārds „invariants” cēlies no latīņu valodas un nozīmē nemainīgs.
Par **invariantiem lielumiem / īpašībām** sauc lielumus / īpašības, kas kādā procesā nemainās, saglabājas.
Invariantu metode bieži ir efektīvi pielietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu operāciju izpilde ar dotajiem lielumiem (tās var būt darbības ar skaitļiem, figūru pārveidojumi utml.) un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu iegūt **nav** iespējams. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties šādi:

- atrodam **invarianto īpašību**, t. i., īpašību, kura **piemīt** sākumā dotajiem lielumiem un **saglabājas**, veicot pieļaujamās operācijas,
- parādam, ka šī īpašība **nepiemīt** lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā.

Invariantā īpašība atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, summas paritāte, dalāmība ar 3, 4, ..., utml.
Uzdevumos par figūru sagriešanu rūtiņu plaknē bieži tiek izmantota palīgmetode – **krāsošana** (bieži izmanto figūras iekrāsošanu kā šaha galdiņu), kur invariantā īpašība ir iekrāsoto rūtiņu skaita nemainība.

## Matemātiskās indukcijas metode

Par **indukciju** sauc spriešanas metodi, kurā no konkrētiem piemēriem iegūst vispārīgu slēdzienu.
Lietojot matemātiskās indukcijas principu uzdevumu risināšanā, rīkojas pēc šāda plāna:

- pārbauda, vai apskatāmā īpašība piemīt kopas pirmajam elementam (*induktīvā bāze*);
- pieņem, ka šī īpašība ir spēkā pirmajiem $k$ elementiem (*induktīvais pieņēmums*);
- pierāda, ka tad tā ir patiesa arī ($k$+1)-jam elementam (*induktīvā pāreja*).
- secina: tā kā no izteikuma patiesuma jebkuram elementam $n = k$ izriet, ka tas ir patiess elementam $n = k + 1$, un tā kā izteikums ir patiess pirmajam elementam, tad izteikums ir patiess jebkuram naturālam elementam $n$.

Pierādījuma metodi, kas balstās uz matemātiskās indukcijas principa, sauc par **matemātiskās indukcijas metodi**.
Matemātiskās indukcijas metode ļauj no atsevišķu elementu īpašībām izdarīt spriedumus par visu kopu.