*Otrdiena, 2013. gada 23. jūlijs*

**1. uzdevums.** Pierādīt, ka jebkuriem diviem veseliem pozitīviem skaitļiem $k$ un $n$, var atrast tādus $k$ veselus pozitīvus skaitļus $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ne obligāti dažādus), ka

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

**2. uzdevums.** Par *kolumbisku* sauksim tādu 4027 punktu konfigurāciju plaknē, kas sastāv no 2013 sarkaniem un 2014 ziliem punktiem un nekādi tās trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Uzzīmējot dažas taisnes, plakne tiek sadalīta apgabalos. Taišņu saimi sauksim par *labu* kolumbiskai konfigurācijai, ja tā apmierina sekojošus divus nosacījumus:

- neviena taisne neiet caur punktu, kas pieder konfigurācijai;
- neviens apgabals nesatur abu krāsu punktus.

Atrast mazāko $k$ vērtību, tādu, ka katrai kolumbiskai 4027 punktu konfigurācijai var atrast labu taišņu saimi, kas sastāv no $k$ taisnēm.

**3. uzdevums.** Pieņemsim, ka trijstūrim $ABC$ pievilkta riņķa līnija, pretējā virsotnei $A$, pieskaras malai $BC$ punktā $A_1$. Definēsim punktus $B_1$ uz $CA$ un $C_1$ uz $AB$ līdzīgi, izmantojot pievilktas riņķa līnijas, pretējās virsotnēm $B$ un $C$, attiecīgi. Dots, ka trijstūra $A_1B_1C_1$ apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz riņķa līnijas, apvilktas ap trijstūri $ABC$. Pierādīt, ka trijstūris $ABC$ ir taisnleņķa.

*Par trijstūrim $ABC$* pievilktu riņķa līniju*, pretējo virsotnei $A$, sauc tādu riņķa līniju, kas pieskaras malai $BC$ no ārpuses un malu $AB$ un $AC$ pagarinājumiem. Pievilktas riņķa līnijas, pretējās virsotnēm $B$ un $C$, definē līdzīgi.*



*Laiks: 4 stundas un 30 minūtes*
*Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus*

*Trešdiena, 2013. gada 24. jūlijs*

**4. uzdevums.** Punkts $H$ ir šaurleņķa trijstūra $ABC$ augstumu krustpunkts, un $W$ ir punkts uz malas $BC$ stingri starp punktiem $B$ un $C$. Punkti $M$ un $N$ ir augstumu pamati, kas vilkti no virsotnēm $B$ un $C$, attiecīgi. Apzīmēsim ar $\omega_1$ riņķa līniju apvilkto ap trijstūri $BWN$, un ar $X$ tādu punktu uz $\omega_1$, ka $WX$ ir $\omega_1$ diametrs. Analoģiski, apzīmēsim ar $\omega_2$ riņķa līniju, kas apvilkta ap trijstūri $CWM$, un ar $Y$ tādu punktu uz $\omega_2$, ka $WY$ ir $\omega_2$ diametrs. Pierādīt, ka punkti $X$, $Y$ un $H$ atrodas uz vienas taisnes.

**5. uzdevums.** Apzīmesim ar $\mathbb{Q}_{>0}$ racionālo pozitīvo skaitļu kopu. Pieņemsim, ka $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ ir funkcija, kas apmierina sekojošus trīs nosacījumus:

(i) visiem $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ izpildās $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) visiem $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ izpildās $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) eksistē racionāls skaitlis $a > 1$, tāds, ka $f(a) = a$.

Pierādīt, ka $f(x) = x$ visiem $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

**6. uzdevums.** Dots, ka $n \geq 3$ ir vesels skaitlis, un aplūkosim riņķa līniju ar uz tās vienmērīgi izvietotiem $n+1$ punktiem. Aplūkosim visus veidus, kuros punktiem tiek piekārtoti skaitļi $0, 1, \ldots, n$, tā, ka katrs skaitlis tiek izmantots tieši vienu reizi; divi piekārtojumi skaitās vienādi, ja vienu var pārtaisīt par otro, pagriežot riņķa līniju. Piekārtojumu sauc par *skaistu*, ja jebkuriem četriem skaitļiem $a < b < c < d$, tādiem, ka $a + d = b + c$, horda, kas savieno punktus apzīmētus ar $a$ un $d$, nekrusto hordu, kas savieno punktus apzīmētus ar $b$ un $c$.

Apzīmēsim ar $M$ skaisto piekārtojumu skaitu, un ar $N$ tādu sakārtotu pāru $(x, y)$ skaitu, ka $x$ un $y$ ir veselie pozitīvi skaitļi, $x + y \leq n$ un $\operatorname{lkd}(x, y) = 1$. Pierādīt, ka

$$M = N + 1.$$



*Laiks: 4 stundas un 30 minūtes*
*Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus*