Agnis Andžāns, Andris Ambainis, Inga France

Matemātikas sacensības

9.-12. klasēm

1993./94. mācību gadā

Rīga, 1997

Ievads

Šajā izstrādnē ievietoti 1993./94. mācību gada sagatavošanās olimpiādes, rajona olimpiādes, 44. valsts olimpiādes, valsts izlases atlases sacensību un 21.atklātās olimpiādes uzdevumi 9.-12. klasēm, kā arī starptautiskās komandu olimpiādes "Baltijas ceļš - 93" (Rīga) un 35. starptautiskās matemātikas olimpiādes (Honkonga) uzdevumi. Doti arī to atrisinājumi. Visiem uzdevumiem ir vienota numerācija.

Lasītājam jāievēro, ka daudzus uzdevumus noteikti var atrisināt arī citādi, nekā norādīts. Izstrādne paredzēta aktīvam darbam. Atrisinājumos bieži izlaistas tehniskas detaļas - algebriski pārveidojumi u.tml.

SATURS

UZDEVUMI

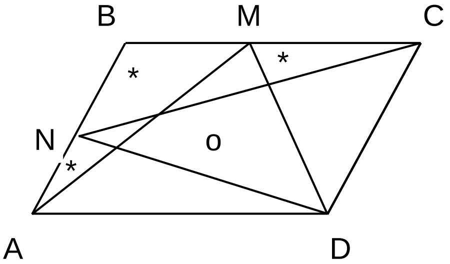
Sagatavošanās olimpiāde (1.-20.)

9. klase (1.-5.)

1. Vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir tieši divas dažādas saknes.
Cik sakņu var būt vienādojumam $cx^2+bx+a=0$?

2. Vai $(n-1)!$ dalās ar n, ja
a) $n=16$; b) $n=41$; c) $n=1991$; d) $n=1993$?

3. Paralelogramā ABCD ievilkti trijstūri AMD un CND (1. zīm.).



1. zīm.

Pierādīt, ka ar * apzīmēto apgabalu laukumu summa vienāda ar tā apgabala laukumu, kas apzīmēts ar **o**.

4. Aprēķināt izteiksmes vērtību, izsakot to kā decimāldaļskaitli:

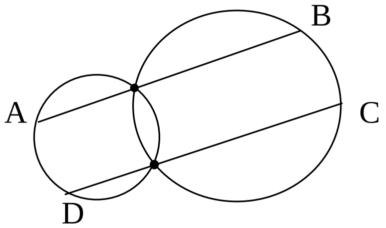
$$\frac{1}{2^{-1993}+1} + \frac{1}{2^{-1992}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{0}+1} + \frac{1}{2^{1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{1993}+1}.$$

5. Desmit futbolkomandas katra ar katru spēlēja vienu reizi. Par uzvaru komanda saņem 2 punktus, par neizšķirtu - 1 punktu, par zaudējumu - 0 punktus. "Daugava" ieguva vairāk punktu nekā jebkura cita komanda.
Kāds lielākais zaudējumu skaits varēja būt "Daugavai" ?

10. klase (6.-10.)

6. Vai skaitlis $2^{123}+1$ ir pirmskaitlis ?

7. Sekantes AB un CD ir paralēlas un iet caur divu riņķa līniju krustpunktiem (2. zīm.). Pierādīt, ka ABCD ir paralelograms.



2. zīm.

8. Dots, ka $ax=by=cz=10$; visi 6 skaitļi $a,\ldots,z$ ir pozitīvi.

Pierādīt, ka

$$(a+b+c)(x+y+z) \geq 90.$$

9. Uzzīmēt plaknē B astoņus punktus tā, lai nekādi trīs no tiem neatrastos uz vienas taisnes un nekādi pieci nebūtu izliekta piecstūra virsotnes. Pietiek ar vienu piemēru.

10. Klasē ir n ($n\geq 2$) skolēnu; daži no tiem draudzējas. Ja divi skolēni nedraudzējas savā starpā, tad var atrast trešo, kas draudzējas ar šiem abiem skolēniem.

Kāds ir mazākais iespējamais draudzību skaits ?

(Uzskatām, ka katrs draugu pāris veido vienu draudzību, pārus AB un BA uzskatām par vienu un to pašu pāri.)

11. klase (11.-15.)

11. Zināms, ka izliektā četrstūrī ABCD leņķis ABD ir vienāds ar leņķi ACD.

Pierādīt, ka $\angle BCA = \angle BDA$.

12. Dots, ka n - naturāls skaitlis un n-3 dalās ar 5.

Kuri no norādītajiem skaitļiem dalās ar 5:

a) $n-198$; b) n^2-1; c) n^2+1 ?

13. Pierādīt, ka katram naturālam n pastāv nevienādība

$$n^n \geq 2^{n-1}\cdot n!\ .$$

14. Izliektā piecstūrī katra no četrām diagonālēm paralēla savai piecstūra malai. Pierādīt, ka arī piektā diagonāle paralēla kādai piecstūra malai.

15. Klasē ir n ($n\geq 4$) skolēnu; daži no tiem draudzējas. Ja divi skolēni nedraudzējas savā starpā, tad klasē var atrast vismaz 2 citus skolēnus, kas draudzējas ar katru no tiem.

Kāds ir mazākais iespējamais draudzību skaits ? (Uzskatām, ka katrs draugu pāris veido vienu draudzību; pārus AB un BA uzskatām par vienu un to pašu pāri.)

Piezīme olimpiādes žūrijai: var uzdevumu formulēt ar konkrētām n vērtībām, piemēram, n=8.

12. klase (16.-20.)

16. Dots, ka $\sin x=\sin y$ un $\sin 2x=\sin 2y$. Pierādīt, ka

$$\sin 1993x = \sin 1993y.$$

17. Atrast visu tādu četrciparu naturālu skaitļu summu, kam pirmais cipars vienāds ar pēdējo, bet otrais - ar trešo.

18. Trijstūra iekšpusē ņemts punkts. Pierādīt, ka tā attālumu summa līdz trijstūra malām nav mazāka par trijstūra mazāko augstumu un nav lielāka par trijstūra lielāko augstumu.

19. Vai eksistē izliekts daudzskaldnis ar 25 skaldnēm, kas visas ir četrstūri?

20. Klasē ir n ($n\geq 4$) skolēnu; daži no tiem draudzējas. Katriem diviem skolēniem var atrast trešo, kas draudzējas ar tiem abiem.

Kāds ir mazākais iespējamais draudzību skaits ?

(Uzskatām, ka katrs draugu pāris veido vienu draudzību; pārus AB un BA uzskatām par vienu un to pašu pāri.)

Piezīme olimpiādes žūrijai: var uzdevumu formulēt ar konkrētām n vērtībām, piemēram, n=8 un n=9 (sk. atrisinājumu).

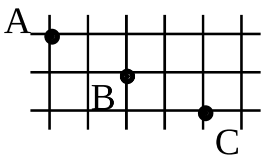
Rajona olimpiāde (21.-40.)

9. klase (21.-25.)

21. Vai vienādojumam $2x^2-2x(a+b)+(a^2+b^2)=0$ var būt atrisinājumi, ja a un b ir dažādi skaitļi ?

22. Plakne sadalīta vienādos kvadrātos (sk. 3. zīm.).

Pierādīt, ka rūtiņu virsotnes A, B un C atrodas uz vienas taisnes.



3. zīm.

23. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x^2+x=y^2 .$$

24. Par trisektoru sauc ierīci, kas jebkuru nogriezni ļauj sadalīt 3 vienādās daļās. Kā, izmantojot lineālu un trisektoru, bet neizmantojot cirkuli, var atrast nogriežņa viduspunktu ?

25. Vai pa apli var izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 15 (katru tieši vienu reizi) tā, lai katru divu blakus esošu skaitļu starpība būtu 4, 5, 6 vai 7 ? (Pieļaujamas vienlaikus vairākas vai pat visas šīs starpības.)

10. klase (26.-30.)

26. Kvadrāta ABCD malas garums ir 1; M ir AD viduspunkts. Nogriežņi AC un BM krustojas punktā S.

Aprēķināt ΔASM laukumu.

27. Kādām a vērtībām vienādojumam

$$x^2=|x-a|$$

ir tieši trīs dažādas saknes ?

28. Naturālie skaitļi no 1 līdz 18 apvienoti pa pāriem tā, ka katra pāra skaitļu summa ir vesela skaitļa kvadrāts. Ar ko vienā pārī apvienots skaitlis 1 ?

29. Rindā nostādīti 10 zēni un 10 meitenes. Divus bērnus var mainīt vietām tad, ja starp tiem stāv ne vairāk kā 9 citi.

Pierādīt:

a) ka ar 10 maiņām noteikti pietiek, lai panāktu, ka rindā vispirms stāv 10 zēni, bet pēc tam 10 meitenes;

b) sākuma situācija var būt tāda, ka ar 9 maiņām to panākt nevar.

30. Divas riņķa līnijas krustojas punktos A un B. Taisne, kas vilkta caur A, krusto šīs riņķa līnijas punktos M un N tā, ka A atrodas starp M un N. Nogriežņa MN viduspunkts ir Z. Taisne BZ krusto abas riņķa līnijas punktos L un K; Z atrodas starp L un K.

Pierādīt, ka ZL=ZK.

11. klase (31.-35.)

31. Dots, ka x=y-1. Pierādīt, ka

$$(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) = y^8-x^8 .$$

32. Caur punktu O trijstūra iekšpusē novilktas 3 taisnes, kas paralēlas trijstūra malām. Trijstūris sadalās trijos paralelogramos un trijos trijstūros.

Pierādīt, ka paralelogramu laukumu reizinājums ir 8 reizes lielāks par trijstūru laukumu reizinājumu.

33. Naturāla skaitļa n visi pozitīvie dalītāji ir $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

Pierādīt, ka

$$\frac{d_1}{\sqrt{n}} + \frac{d_2}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{d_k}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{d_1} + \frac{\sqrt{n}}{d_2} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{d_k} .$$

34. Divas riņķa līnijas krustojas punktos M un N. Uz vienas no tām ārpus otras ņemts punkts K. Taisnes KM un KN krusto otru riņķa līniju atbilstoši punktos A un B tā, ka M atrodas starp A un K, bet N - starp B un K. Pierādīt, ka taisne AB paralēla pirmās riņķa līnijas pieskarei punktā K.

35. Ziemassvētku dāvanu sūtījums kopā sver 225 kg. Tas iepakots sainīšos tā, ka neviens sainītis nav smagāks par 3 kg. Dāvanas iznēsā 10 Salaveči, katrs no tiem var panest ne vairāk par 25 kg.

Pierādīt, ka dāvanas var sadalīt (sainīšus neatverot) tā, ka Salaveči tās var aiznest visas uzreiz.

12. klase (36.-40.)

36. Atrisināt vienādojumu

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = 1 .$$

37. Ar [*x*] apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *x* .

Piemēram, [3] = 3; [4, 2] = 4.

Kādiem naturāliem n skaitļiem $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ ir pirmskaitlis ?

38. Divas riņķa līnijas krustojas punktos M un N. Tām novilktas kopējās ārējās pieskares, pieskaršanās punkti ir trapeces virsotnes.

Pierādīt, ka M un N atrodas uz šīs trapeces viduslīnijas.

39. No vienas taisnstūra paralēlskaldņa virsotnes novilktas triju skaldņu diagonāles. Pierādīt, ka to leņķu lielumu summa, kuru veido šīs diagonāles, ir 180^0.

40. Izliektā daudzstūrī katra mala un katra diagonāle nokrāsota vienā no 3 krāsām tā, ka neeksistē nekāda slēgta lauzta līnija ar virsotnēm daudzstūra virsotnēs, kuras visi posmi nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā. Kāds lielākais malu skaits var būt sākotnējam daudzstūrim ?

44. Valsts olimpiādes 3.kārta (41.-60.)

9. klase (41.-45.)

41. Dota kvadrātfunkcija $y=x^2+px+q$, kur p un q ir pāra skaitļi. Zināms, ka visiem veseliem x pastāv nevienādība $y\geq0$.

Pierādīt, ka nevienādība $y\geq0$ pastāv visiem x (ne tikai veseliem).

42. Uz izliekta četrstūra ABCD malām AB, BC, CD, DA ņemti atbilstoši punkti M, N, K, L. Riņķa līnijas, kas apvilktas ap trijstūriem AML, BNM, CNK, krustojas punktā O četrstūra iekšpusē.

Pierādīt, ka punkti D, L, K, O atrodas uz vienas riņķa līnijas.

43. Pierādīt, ka visiem naturāliem n skaitlis n^5-n dalās ar 30. Kādiem naturāliem n skaitlis n^5-n dalās ar 120 ?

44. Pierādīt, ka katru daudzstūri var sagriezt platleņķa trijstūros.

45. Sešos grozos atrodas attiecīgi 31, 32, 33, 34, 35, 36 konfektes. Ar vienu gājienu atļauts no pieciem groziem paņemt pa vienai konfektei un ielikt tās sestajā. Vai var panākt, lai visas konfektes vienlaikus atrastos vienā vai divos grozos ?

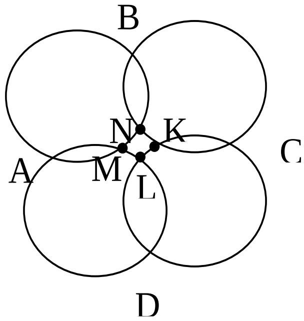
10. klase (46.-50.)

46. Vienādouma

$$x^2+px+q = 0$$

saknes ir 2p un 2q. Atrast p un q.

47. Četras riņķa līnijas krustojas, kā parādīts 4. zīmējumā.



4. zīm.

Zināms, ka ap četrstūri ABCD var apvilkt riņķa līniju. Pierādīt, ka arī ap četrstūri MNKL var apvilkt riņķa līniju.

48. Pierādīt, ka skaitli 2n var izsacīt kā divu (varbūt vienādu) veselu skaitļu kvadrātu summu tad un tikai tad, kad skaitli n var izsacīt kā divu (varbūt vienādu) veselu skaitļu kvadrātu summu (n - patvaļīgs naturāls skaitlis).

49. Pierādīt, ka nevienu izliektu daudzstūri nevar sagriezt gabalos tā, lai visi gabali būtu ieliekti četrstūri.

50. Tabula sastāv no $2n \times 2n$ rūtiņām. Tieši 3n rūtiņās iezīmēts pa vienai zvaigznītei. Pierādīt, ka var nokrāsot melnā krāsā n kolonnas un n rindiņas tā, lai visas zvaigznītes būtu aizkrāsotas.

Vai iespējams izvietot 6×6 rūtiņu tabulā 10 zvaigznītes tā, lai tās visas nevarētu aizkrāsot, nokrāsojot 3 rindiņas un 3 kolonnas ?

11. klase (51.-55.)

51. Koordinātu plaknē uzzīmēti funkciju $y=x^2+px+q$ un $y=x^2+ax+b$ grafiki.

Cik daļās var tikt sadalīta koordinātu plakne ?

52. Divas kuba virsotnes sauc par blakus virsotnēm, ja tās savieno šķautne.

a) Parādīt, ka kuba virsotnēs var ierakstīt pa naturālam skaitlim tā, lai 7 virsotnēs ierakstītie skaitļi katrs būtu mazāks par savu triju kaimiņu vidējo aritmētisko.

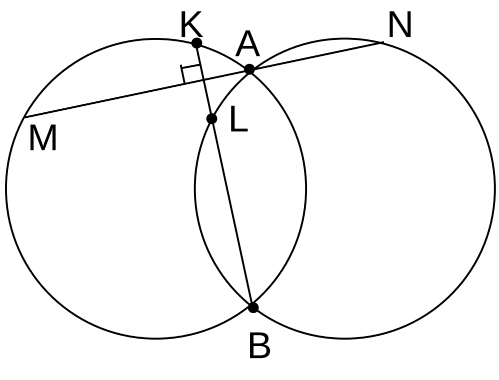
b) Vai var panākt, lai šī īpašība izpildītos visās 8 virsotnēs ierakstītajiem skaitļiem ?

53. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$3^x+3^y+1 = z^2 .$$

54. Divas vienādas riņķa līnijas krustojas punktos A un B. Taisne MN iet caur punktu A. Taisne, kas iet caur B perpendikulāri MN, krusto riņķa līnijas punktos K un L (sk. 5. zīm.)

Pierādīt, ka MKNL ir rombs.



5. zīm.

55. Turnīrā piedalās 22 komandas. Līdz pārtraukumam turnīrā tika izspēlētas 10 kārtas. Katrā kārtā komandas sadalījās 11 pāros, un viena pāra komandas spēlēja savā starpā. Nekādas divas komandas nespēlēja savā starpā vairāk par vienu reizi.

Pierādīt, ka var atrast 3 komandas, kas savā starpā vēl nav spēlējušas nevienu spēli.

12. klase (56.-60.)

56. Dots, ka cosx = cosy un sinx = - siny. Pierādīt, ka

$$\sin 1994x + \sin 1994y = 0.$$

57. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa; kvadrāta malas garums ir 1. Uzzīmēts piecstūris, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs.

Pierādīt:

a) ka tā laukums ir vismaz 3/2;

b) ja piecstūris ir izliekts, tad tā laukums ir vismaz 5/2.

58. Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi un $a+b+c = abc$.

Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir lielāks par 1,7.

59. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$1!+2!+3!+\ldots+n! = m^3.$$

60. Iestādē strādā 1994 cilvēki. Katram no viņiem šajā iestādē ir 1600 paziņu. Pierādīt, ka var atrast tādus sešus šīs iestādes darbiniekus, kas visi cits citu pazīst.

Rezerves variants 9. klasei (61.-65.)

61. Apskatām vienādojumus $x^2+2ax+b^2 = 0$ un $x^2+2bx+a^2 = 0$ (a un b - kaut kādi skaitļi). Ir zināms, ka tiem abiem eksistē atrisinājumi.

Kādi var būt skaitļi a un b?

62. Apskatām vienādojumu $x^2-y^2 = 111$. Atrast

a) kaut vienu tā atrisinājumu naturālos skaitļos;

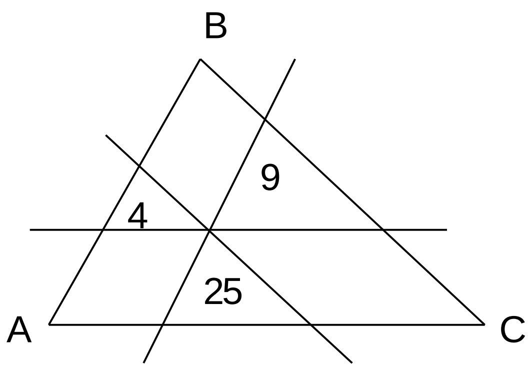
b) visus tā atrisinājumus naturālos skaitļos un pamatot, ka citu bez atrastajiem nav.

63. Ir zināms, ka pastāv trijstūris, kura viens leņķis ir 60^0 un malu garumi ir a, b un c ($a>b>c$).

Pierādīt, ka pastāv trijstūris, kura viens leņķis ir 120^0 un malu garumi ir $a - c$, b un c.

64. Caur punktu trijstūra iekšpusē paralēli tā malām novilktas taisnes. Triju izveidojušos trijstūru laukumi ir 4; 9; 25 (sk. 6. zīm.).

Aprēķināt ΔABC laukumu.



6. zīm.

65. Kvadrāts sadalīts 8×8 rūtiņās. Tajās ierakstīti skaitļi no 1 līdz 64 "normālā" kārtībā (sk. 7 .zīm.). Pēc tam dažiem skaitļiem priekšā pierakstīja " - " zīmes tā, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā ir tieši 4 " - " zīmes.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	...	...				
					62	63	64

7. zīm.

Pierādīt, ka visu ierakstīto skaitļu summa ir 0.

Rezerves variants 11. klasei (66.-70.)

66. Pierādīt, ka $\overline{abcdef}$ dalās ar 7 tad un tikai tad, kad ar 7 dalās starpība

$$\overline{abc} - \overline{def}\ .$$

67. Atrast lielāko naturālo skaitli n ar īpašību: kvadrātu ar izmēriem n×n var sagriezt 7 taisnstūros, kuru malu garumu kopa ir {1;2;3;4;…;13;14}.

68. Skaitļu virkni $a_1; a_2; \ldots$ veido šādi : $a_1=1; a_2=1; a_3=4;$ ja $n\geq 2$, tad

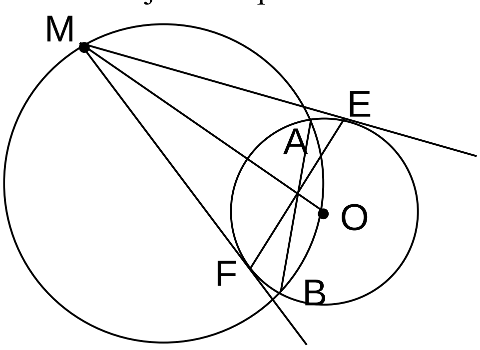
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n - a_{n-1}.$$

Pierādīt, ka visiem naturāliem n pastāv vienādība

$$\sqrt{a_{n+2}} = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}\ .$$

69. Divas riņķa līnijas krustojas punktos A un B; otrās riņķa līnijas centrs 0 atrodas uz pirmās riņķa līnijas. Punkts M atrodas uz pirmās riņķa līnijas ārpus otrās; ME un MF ir otrās riņķa līnijas pieskares (sk. 8. zīm.).

Pierādīt, ka OM , AB un EF krustojas vienā punktā.



8. zīm.

70. Riņķa līnija ar 60 punktiem sadalīta 60 vienādos lokos. Dalījuma punkti pa pāriem savienoti, novelkot 30 hordas.

Pierādīt, ka starp šīm hordām ir vismaz divas vienādas hordas.

44. Valsts olimpiādes 4. kārta – atlases sacensības izlases kandidātiem (71.-75.)

71. Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi un

$$3x^2+x = 4y^2+y.$$

Pierādīt, ka x-y, 3x+3y+1 un 4x+4y+1 ir naturālu skaitļu kvadrāti.

72. Vai var atrast tādus 2^{1994} dažādus naturālu skaitļu pārus (a_i, b_i), ka vienlaikus izpildās šādas prasības:

1) $\dfrac{1}{a_1 b_1} + \dfrac{1}{a_2 b_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{2^{1994}} b_{2^{1994}}} = 1$;

2) $\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{1994}}\right) + \left(b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^{1994}}\right) = 3^{1995}$?

73. Plaknē dots riņķis ar rādiusu 1. Sauksim nogriežņu sistēmu par nosedzošu, ja katrai taisnei, kam ir kopīgs punkts ar riņķi, ir kopīgs punkts arī ar kādu sistēmas nogriezni.

a) Pierādīt, ka nosedzošas sistēmas nogriežņu garumu summa ir lielāka par 3.

b) Vai eksistē tāda nosedzoša sistēma, kuras nogriežņu garumu summa mazāka par 5 ?

74. Uz tāfeles uzrakstīts naturāls skaitlis n. Divi spēlētāji izdara gājienus pēc kārtas. Pirmais spēlētājs ar savu gājienu nodzēš uz tāfeles esošo skaitli un vietā uzraksta tā dalījumu ar 2, dalījumu ar 4 vai reizinājumu ar 3 (kādu no dalījumiem drīkst rakstīt tikai tad, ja tas ir naturāls skaitlis). Otrais spēlētājs ar savu gājienu nodzēš uz tāfeles esošo skaitli un tā vietā uzraksta par 1 lielāku vai par 1 mazāku skaitli. Pirmais spēlētājs grib panākt, lai uz tāfeles kādreiz parādītos skaitlis 3 (viņam vienalga, kurš to uzraksta). Vai pirmais spēlētājs noteikti var sasniegt savu mērķi, pat ja otrais cenšas viņam traucēt?

75. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas vienā punktā O. To otrie krustpunkti (pa divām) ir A, B, C. Ar Δ apzīmējam trijstūri, kura malas katra pieskaras divām riņķa līnijām un kura iekšpusē atrodas visas trīs riņķa līnijas. Pierādīt, ka Δ laukums ir vismaz 9 reizes lielāks par ABC laukumu.

21.atklātā matemātikas olimpiāde (76.-95.)

9. klase (76.-80.)

76. Vienādojumam $ax^2+bx+c = 0$ ir divas dažādas saknes.
Vai vienādojumam $cx^2+bx+a = 0$ arī noteikti ir divas dažādas saknes?

77. Četrstūris ABCD apvilkts ap riņķa līniju, un tā diagonāles AC un BD ir savstarpēji perpendikulāras. Pierādīt, ka $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

78. Kādā valstī ir 10 pilsētas un 37 aviolīnijas. Katra aviolīnija savieno divas pilsētas abos virzienos, neiegriežoties citās; nekādas divas aviolīnijas nesavieno vienu un to pašu pilsētu pāri.

Pierādīt, ka no katras pilsētas var aizlidot uz katru citu, veicot ne vairāk par vienu pārsēšanos.

79. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas vienā punktā O un vēl pa divām punktos A, B un C, kas neatrodas uz vienas taisnes.

Pierādīt, ka O ir ΔABC augstumu krustpunkts.

80. Vai eksistē n veseli skaitļi (daži no tiem var būt vienādi), kuru summa ir 0, bet reizinājums ir n?

Atrisināt šo uzdevumu, ja a) n = 1992, b) n = 1994.

10. klase (81.-85.)

81. Dots, ka *a, b, c* - pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > 1$.

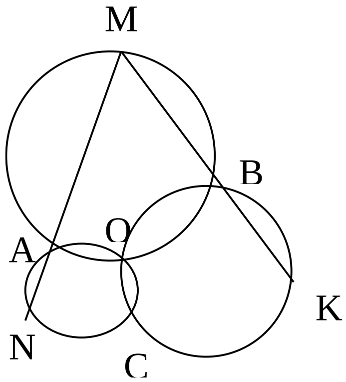
Vai var pierādīt, ka nevienādības kreisā puse lielāka par *1,01* ?

82. Ar $p_1, p_2, \ldots, p_n$ apzīmējam augošā kārtībā pirmos n pirmskaitļus.

Pierādīt, ka $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

83. Vai daļa 0,1491625…, kuru iegūst, izrakstot aiz komata pēc kārtas visu naturālo skaitļu kvadrātus, izsaka racionālu vai iracionālu skaitli?

84. Trīs riņķa līnijas krustojas vienā punktā O un bez tam vēl pa divām punktos A, B, C (sk. 9. zīm.).

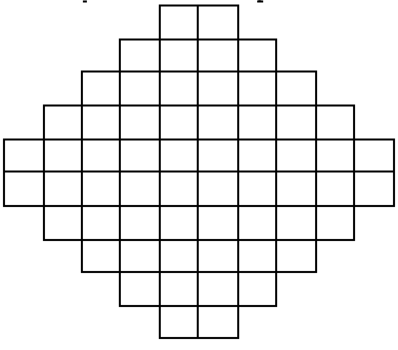


9. zīm.

Zināms, ka M, A, N atrodas uz vienas taisnes un M, B, K - tāpat.

Pierādīt, ka N, C, K atrodas uz vienas taisnes.

85. Kāds būs vismazākais gabalu skaits, ja 10. zīm. redzamā figūra jāsagriež tā, lai neviens gabals nesaturētu kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas? Griezumi jāizdara tikai pa rūtiņu līnijām.



10. zīm.

11. klase (86.-90.)

86. Pierādīt, ka vienādojuma $x^2-3x-1 = 0$ saknes ir arī vienādojuma

$$(x^2-2x-1)^2 - 2(x^2-2x-1) - x - 1 = 0$$

saknes.

87. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu

$$(x^2+y)\cdot(y^2+x) = (x+y)^3.$$

88. Dots, ka $a, b, c,$ $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+c}{b}$ un $\frac{b+c}{a}$ ir naturāli skaitļi.

Pierādīt, ka

$$\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} < 9.$$

89. Kubs sastāv no 1994×1994×1994 vienādiem kubiņiem. Pierādīt, ka kubiņos var ierakstīt dažādus veselus skaitļus tā, lai katrā 1994 kubiņu veidotā "stabiņā", kas paralēls kādai no kuba šķautnēm, ierakstīto skaitļu summa būtu 0.

90. Regulārā 100-stūrī atzīmēti visu malu un visu diagonāļu viduspunkti. Kāds ir lielākais daudzums atzīmēto punktu, kas atrodas uz vienas riņķa līnijas?

12. klase (91.-95.)

91. Atrisināt vienādojumu

$$\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

92. Pierādīt, ka starp katriem 10 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem var atrast vienu, kas ir savstarpējs pirmskaitlis ar visiem pārējiem.

93. Šaurleņķu trijstūrī augstums no virsotnes A vienāds ar mediānu no virsotnes B un ar bisektrisi no virsotnes C.

Pierādīt, ka trijstūris ABC ir regulārs.

94. Naturāli skaitļi no 1 līdz 1994 izrakstīti virknē kaut kādā kārtībā (katrs vienu reizi). Atrast mazāko n ar īpašību: noteikti var izsvītrot n skaitļus no virknes tā, ka atlikušie skaitļi veido vai nu augošu, vai dilstošu virkni.

95. Kāds mazākais punktu skaits plaknē jāatzīmē, lai pie $i = 1; 2; 3;\ldots; n$ eksistētu vismaz viena taisne, uz kuras ir tieši i atzīmētie punkti?

Atlases sacensības 35. starptautiskajai olimpiādei (96.-101.)

1. kārta (96.-98.)

96. Tabula sastāv no n×n rūtiņām. Dažās rūtiņās novietots pa baltam vai melnam kauliņam tā, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā atrodas tieši viens balts un tieši viens melns kauliņš. Atļauts ar vienu gājienu mainīt vietām vai nu divas kolonnas, vai divas rindiņas.

Pierādīt, ka ar šādiem gājieniem var panākt, lai baltie kauliņi atrastos tur, kur sākumā melnie, bet melnie - tur, kur sākumā baltie.

97. Ap četrstūri ABCD var apvilkt riņķa līniju. Četrstūra diagonāles krustojas punktā O. Malu AB un CD viduspunkti ir attiecīgi U un V.

Caur punktiem O, U, V velkam taisnes perpendikulāri attiecīgi AD, BD un AC. Pierādīt, ka tās krustojas vienā punktā.

98. Apskatām vienādojumu ar veseliem koeficientiem

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz = 0.$$

Ir zināms, ka visi koeficienti $|a_{ij}|<100$ un vienādojumam ir atrisinājums (1234; 3456; 5678).

Pierādīt, ka tam ir atrisinājums, kas nav proporcionāls norādītajam un kurā x,y,z ir pa pāriem relatīvi pirmskaitļi.

2. kārta (99.-101.)

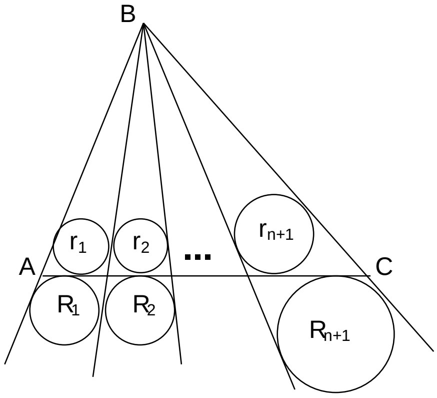
99. Dots, ka $0 \le x_i \le 1$, , $i = 1;2;\cdots;n$. Atrast izteiksmes

$$\frac{x_1}{x_2 x_3 \cdots x_n + 1} + \frac{x_2}{x_1 x_3 \cdots x_n + 1} + \cdots + \frac{x_n}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + 1}$$

maksimālo iespējamo vērtību.

100. Riņķa līnija ar 2n punktiem sadalīta 2n vienādos lokos. Dalījuma punkti jāsavieno ar n taisnes nogriežņiem tā, lai izveidotos n dažāda garuma hordas (visiem 2n punktiem jābūt izmantotiem kā hordu galapunktiem). Vai tas iespējams, ja a) n=24, b) n=1994 ?

101. Dots trijstūris ABC. No tā virsotnes B novilkti n stari, kas krusto malu AC. Tādējādi ΔABC sadalīts n+1 mazākos trijstūros. Katram no tiem konstruēta ievilktā riņķa līnija ar rādiusu r_i un pievilktā riņķa līnija ar rādiusu R_i (sk. 11. zīm.).



11.zīm.

Pierādīt, ka izteiksmes $\dfrac{r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_{n+1}}{R_1 \cdot R_2 \cdot \cdots \cdot R_{n+1}}$

vērtība nav atkarīga ne no *n*, ne arī no tā, kuri *n* stari tiek novilkti.

Starptautiskās komandu olimpiādes "Baltijas ceļš-93" uzdevumi (102.-121.)

102. $\overline{a_1a_2a_3}$ un $\overline{a_3a_2a_1}$ ir divi trīsciparu skaitļi; a_1 un a_3 ir dažādi nenulles cipari. To kvadrāti ir attiecīgi piecciparu skaitļi $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$ un $\overline{b_5b_4b_3b_2b_1}$.

Atrast visus šādus trīsciparu skaitļus.

103. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi a>b>1, ka katram naturālam k var atrast naturālu skaitli n ar īpašību: an+b ir kāda naturāla skaitļa k-tā pakāpe?

104. Naturālu skaitli sauc par interesantu, ja tas ir divu (vienādu vai dažādu) pirmskaitļu reizinājums. Kāds ir lielākais iespējamais pēc kārtas esošu naturālu skaitļu skaits, kas visi ir interesanti?

105. Atrast visus tādus veselus skaitļus *n*, ka

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$

ir vesels skaitlis.

106. Pierādīt, ka visiem nepāra naturāliem skaitļiem n

skaitlis

$$n^{12}-n^8-n^4+1$$

dalās ar 2^9.

107. Pieņemsim, ka f(x) un g(x) ir funkcijas, kas definētas visiem x, kuri apmierina nosacījumus 2<x<4. Bez tam visiem x, 2<x<4, izpildās sakarības 2<f(x)<4, 2<g(x)<4, f(g(x))=g(f(x))=x, $f(x)\cdot g(x)=x^2$.

Pierādīt, ka f(3) = g(3).

108. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 4^x \\ x+y+z=20. \end{cases}$$

109. Aprēķināt visu tādu naturālu skaitļu summu, kuru cipari veido stingri augošu vai stingri dilstošu virkni. (Par augošu / dilstošu uzskatām arī virkni, kas sastāv no viena elementa.)

110. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^5 = y + y^5 \\ y^5 = z + z^5 \\ z^5 = t + t^5 \\ t^5 = x + x^5. \end{cases}$$

111. Pieņemsim, ka $a_1;a_2;\ldots;a_n$ un $b_1;b_2;\ldots;b_n$ ir divas galīgas skaitļu virknes, kas sastāv no $2n$ dažādiem skaitļiem. Pārkārtojot katru no tām augošā kārtībā , iegūstam virknes $a_1';a_2';\ldots;a_n'$ un $b_1';b_2';\ldots;b_n'$.

Pierādīt, ka

$$\max_{1\le i\le n}\left|a_i - b_i\right| \ge \max_{1\le i\le n}\left|a'_i - b_i'\right|.$$

112. Vienādmalu trijstūris ir sadalīts n^2 vienādos vienādmalu trijstūros. Zirneklis nostājas vienā sākotnējā trijstūra virsotnē, muša - otrā. Viņi pēc kārtas izdara pa vienam gājienam, ar katru gājienu pārvietojoties uz režģa blakus virsotni.

Pierādīt, ka zirneklis var noķert mušu.

113. Kādā karaļvalstī ir 13 pilsētas. Starp dažiem pilsētu pāriem ir nodibināta abpusēja satiksme ar autobusa, vilciena vai lidmašīnas palīdzību.

Kāds ir mazākais iespējamais šādu pāru skaits, ja ir zināms: lai kādus divus transporta veidus izvēlētos, no jebkuras pilsētas var nokļūt jebkurā citā (varbūt ar pārsēšanos), neizmantojot trešo transporta veidu?

114. Vienādmalu trijstūris ABC ir sadalīts 100 vienādos vienādmalu trijstūros. Kāds ir lielākais mazo trijstūru virsotņu skaits, kuras var izvēlēties tā, lai nekādas divas virsotnes no izvēlētajām neatrastos uz taisnes, kas paralēla kādai no trijstūra ABC malām?

115. Kvadrāts sadalīts 16 vienādos kvadrātos, tādējādi iegūstot 25 dažādu virsotņu kopu. Kāds ir mazākais virsotņu skaits, kuras var izņemt no šīs kopas tā, lai nekādi 4 no palikušajiem punktiem nebūtu tāda kvadrāta virsotnes, kura malas paralēlas sākotnējā kvadrāta malām?

116. Divus kubiskus metamos kauliņus met un saskaita uzmestos skaitļus.

Vai var uz kauliņu skaldnēm uzrakstīt naturālus skaitļus tā, lai iespējamās summas būtu 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13 un lai visas tās būtu vienādi iespējamas?

117. Divas vienādas riņķa līnijas novietotas plaknē tā, ka tās nekrustojas. Kāda šīs plaknes taisne krusto pirmo riņķa līniju punktos A un B, bet otru riņķa līniju - punktos C un D. Turklāt AB=BC=CD = 14 cm. Otra taisne krusto pirmo riņķa līniju punktos E un F, bet otro - punktos G un H tā, ka EF=FG=GH = 6 cm. Atrast riņķa līniju rādiusus.

118. Plaknē aplūkojam trīs pa pāriem neparalēlas taisnes. Trīs punkti kustas pa šīm taisnēm ar dažādiem konstantiem nenulles ātrumiem, katrs punkts kustas pa savu taisni. (Pieņemam, ka kustība jau notikusi bezgalīgi ilgi un turpināsies bezgalīgi ilgi uz priekšu.)

Vai ir iespējams tā izvēlēties šīs taisnes, katra punkta sākuma stāvokli kādā "nulles" momentā un katra punkta ātrumu tā, lai punkti nekad nebūtu bijuši, pašreiz nebūtu un arī nākotnē nekad nenonāktu uz vienas taisnes?

119. Trijstūrī ABC zināms, ka AB=15, BC=12, AC=13. Mediāna AM un bisektrise BK krustojas punktā O ($M \in BC$, $K \in AC$). Novelkam $OL \perp AB$, $L \in AB$. Pierādīt, ka $\angle OLK = \angle OLM$.

120. Izliekts četrstūris ABCD ievilkts riņķī ar centru O. Leņķiem $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ ir tādi paši lielumi kā kaut kādā kārtībā ņemtiem četrstūra ABCD leņķiem. Pierādīt, ka ABCD ir kvadrāts.

121. Apzīmēsim vienības kubu ar Q. Sauksim tetraedru par labu, ja tā visas šķautnes ir vienādas un visas virsotnes atrodas uz kuba Q virsmas.

Atrast visus iespējamos laba tetraedra tilpumus.

35. starptautiskās matemātikas olimpiādes uzdevumi (122.-127.)

1. diena (122.-124.)

122. Dots, ka m un n ir pozitīvi veseli skaitļi. Kopa $A = \{a_1;a_2;\ldots;a_m\}$ ir kopas $\{1;2;\ldots;n\}$ apakškopa. Ir zināms: ja $a_i + a_j \le n$, kur $1 \le i \le j \le m$, tad a_i+a_j arī ir kopas A elements.

Pierādīt, ka $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \ge \dfrac{n+1}{2}$.

123. Dots, ka ABC ir vienādsānu trijstūris un AB=AC. Bez tam zināms, ka vienlaikus

a) M ir BC viduspunkts un O ir tāds punkts uz AM, ka $OB \perp AB$;

b) Q ir nogriežņa BC punkts, kas nesakrīt ne ar B, ne ar C;

c) E atrodas uz taisnes AB un F atrodas uz taisnes AC tā, ka E, Q, F ir dažādi un pieder vienai taisnei.

Pierādīt, ka $OQ \perp EF$ tad un tikai tad, ja QE=QF.

124. Katram naturālam skaitlim k ar A_k apzīmēsim visu to skaitļu kopu no $\{k+1; k+2; \ldots; 2k\}$, kuru binārajā pierakstā tieši trīs cipari ir vieninieki. Ar f(k) apzīmēsim A_k elementu skaitu.

a) Pierādīt: katram naturālam m vienādojumam f(x)=m ir vismaz viens atrisinājums.

b) Atrast visus tādus naturālos skaitļus m, ka minētajam vienādojumam ir tieši viens atrisinājums.

2. diena (125.-127.)

125. Atrast visus tādus naturālu skaitļu pārus (m;n), ka n^3+1 dalās ar $m \cdot n-1$.

126. Ar S apzīmējam visu to reālo skaitļu kopu, kas lielāki par *(-1)*. Funkcija *f(t)* definēta visiem kopas *S* elementiem un pieņem vērtības no kopas *S*. Zināms, ka vienlaikus izpildās šādas divas īpašības:

a) attiecība $\dfrac{f(x)}{x}$ ir stingri augoša pie $-1<x<0$ un pie $x>0$;

b) visiem x un y no S pastāv sakarība

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + y \cdot f(x).$$

Atrast visas šādas funkcijas *f*.

127. Atrast kaut vienu naturālu skaitļu kopu A, kas apmierina šādu īpašību: lai kāda arī būtu bezgalīga pirmskaitļu kopa P, eksistē skaitlis m, kas pieder A, un skaitlis n, kas nepieder A, turklāt gan m, gan n izsakās kā viena un tā paša daudzuma (vismaz divu) dažādu P elementu reizinājums.

UZDEVUMU RISINĀJUMI UN ATBILDES

Sagatavošanās olimpiāde (1.-20.)

1. Tā kā pēc dotajiem nosacījumiem vienādojumam $ax^2+bx+c = 0$ ir tieši divas dažādas saknes, tad no tā izriet, ka $a\neq0$ (pretējā gadījumā nevarētu būt divas saknes) un $D_1 = b^2-4ac > 0$ ($D_1\neq0$, jo tad būtu divas vienādas saknes; D_1 nevar būt mazāks par 0, jo tad sakņu nebūtu vispār).

1) Ja $c\neq0$, $b\neq0$, tad vienādojumam $cx^2+bx+a = 0$ būs divas dažādas saknes. Proti, tā kā $c\neq0$, tad tas ir pilns kvadrātvienādojums un $D_2 = b^2-4ca = D_1>0$.

Piemēram, vienādojumiem $x^2+3x+2 = 0$ un $2x^2+3x+1 = 0$ katram ir divas dažādas saknes.

2) Ja $c=0$, $b\neq0$, tad vienādojumam $ax^2+bx = 0$ ir divas dažādas saknes, bet vienādojumam $0\cdot x^2+bx+a = bx+a = 0$ būs tikai viena sakne (jo $a\neq0$, $b\neq0$). Kā piemērs der vienādojumi $x^2+x+0=0$ un $x+1 = 0$.

3) Tā kā $a\neq0$, tad vienādojumam $cx^2+bx+a = 0$ nevar būt bezgalīgi daudz sakņu.

4) Vienādojumam $cx^2+bx+a = 0$ nebūtu nevienas saknes, ja $c\neq0$ un $b^2-4ac < 0$ (tas ir pretrunā ar doto) vai arī $c=b=0$ un $a\neq0$ ($0\cdot x^2+0\cdot b+a = 0$), kas arī ir pretrunā ar doto.

Tātad iespējamas viena vai divas saknes.

2. Atbilde. a) un c) dalās; b) un d) nedalās.

Risinājums.

a) $(16-1)! = 15!$. Tā kā $16=2\cdot8$ un $15!$ satur starp saviem reizinātājiem gan 2, gan 8, tad $15!$ dalās ar 16.

b) $(41-1)! = 40!$. Skaitlis 41 ir pirmskaitlis, tāpēc, lai $40!$ dalītos ar 41, tam būtu jāsatur reizinātājs 41, kas, protams, nevar būt.

c) $(1991-1)! = 1990!$. Tā kā $1991 = 11\cdot181$ un $1990!$ satur starp saviem reizinātājiem gan 11, gan 181, tad $1990!$ dalās ar 1991.

d) $(1993-1)! = 1992!$. Skaitlis 1993 ir pirmskaitlis, tāpēc, lai $1992!$ dalītos ar 1993, tam būtu jāsatur reizinātājs 1993, kas ir aplam.

3. Viegli saprast, ka gan [BNC] + [AND], gan [AMD] ir vienādi ar pusi no paralelograma laukuma. Tāpēc [BNC] + [AND] = [AMD]. Atņemot no šīs vienādības abām pusēm laukumus daļām, kas pieder ΔAMD un vai nu ΔBNC, vai ΔAND, iegūstam vajadzīgo.

4. Atbilde. 1993,5.

Risinājums. Izrēķināsim izteiksmes $\dfrac{1}{2^{-a}+1} + \dfrac{1}{2^{a}+1}$ vērtību:

$$\frac{1}{2^{-a}+1} + \frac{1}{2^{a}+1} = \frac{1}{\frac{1}{2^a}+1} + \frac{1}{2^{a}+1} = \frac{2^a}{2^{a}+1} + \frac{1}{2^{a}+1} = \frac{2^a+1}{2^{a}+1} = 1.$$

Sagrupēsim saskaitāmos: $\left(\dfrac{1}{2^{-1993}+1} + \dfrac{1}{2^{1993}+1}\right) +$

$$+\left(\frac{1}{2^{-1992}+1} + \frac{1}{2^{1992}+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{-2}+1} + \frac{1}{2^{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{2^{-1}+1} + \frac{1}{2^{1}+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2^0+1} = 1993\cdot1 + 0{,}5 = 1993{,}5.$$

5. Atbilde. “Daugava” varēja zaudēt ne vairāk kā 4 spēles.

Risinājums. Apzīmēsim “Daugavas” iegūto punktu skaitu ar x. Tādā gadījumā jebkura cita komanda varēja iegūt ne vairāk kā (x-1) punktu. Tā kā turnīrā pavisam tika izspēlētas 45 spēles $\left(\frac{10 \cdot 9}{2}\right)$ un katrā spēlē tika “sadalīti” 2 punkti, tad kopējais iegūto punktu skaits ir $45 \times 2 = 90$. Tātad $x + 9 \cdot (x-1) \geq 90$ (katrai no attiecīgajām 9 komandām “tiek atļauts izcīnīt” vislielāko iespējamo punktu skaitu):

$$x + 9x - 9 \geq 90, \text{ jeb}$$
$$10x \geq 99 \Rightarrow x \geq 9{,}9.$$

Tā kā x ir vesels skaitlis, tad $x \geq 10$. Maksimālais punktu skaits, ko varēja iegūt viena komanda, ir $9 \times 2 = 18$, tādējādi “Daugava” varēja zaudēt augstākais 8 punktus, t.i., 4 spēles.

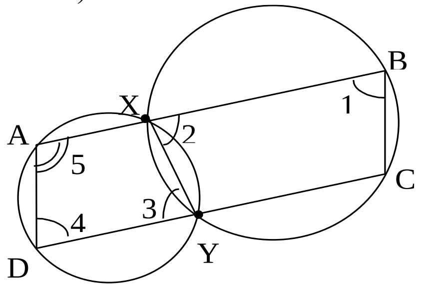
Konstruēsim piemēru, kas parāda, ka tā varēja notikt. Apzīmēsim vēl vienu komandu ar A, četru citu komandu grupu ar X un pārējo četru komandu grupu ar Y.

Uzdevuma nosacījumi izpildīsies, piemēram, tad, ja spēles būs beigušās ar šādiem rezultātiem:

a) “Daugava” zaudē visām X komandām, bet uzvar A komandu un visas Y komandas (“Daugavai” 10 punkti);
b) A komanda spēlē neizšķirti ar visām X un Y komandām (A komandai būs $8 \cdot 1 = 8$ punkti);
c) grupas X komandas savā starpā un Y komandas savā starpā spēlē neizšķirti (tādējādi nopelnot pa 3 punktiem katra);
d) katra X komanda zaudē vienai Y komandai (katra citai), bet pārējās spēles starp X un Y komandām beidzas neizšķirti. Tādējādi katrai X komandai būs $3 \cdot 1$ (par neizšķirtiem ar Y komandām) +3 (par savstarpējiem neizšķirtiem) +2 (par uzvaru pār “Daugavu”) +1 (par neizšķirtu spēli ar A komandu) = 9 punkti. Katrai Y komandai būs 3+2 (uzvara pār kādu X komandu) +3 (neizšķirtas spēles ar pārējām X komandām) +1 (neizšķirts ar A komandu) = 9 punkti.

6. Nē, nav. Ievērosim, ka $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, tātad naturāliem a un b skaitlis a^3+b^3 dalās ar a+b. Bet mūsu gadījumā varam ņemt $a = 2^{41}$, $b=1$.

7. Lai pierādītu, ka ABCD ir paralelograms, pietiek pierādīt, ka AD ∥ BC. Apzīmēsim riņķa līniju krustpunktus ar X un Y (sk. 12.zīm.)



12. zīm.

AXYD un XYCB ir riņķa līnijās ievilktas trapeces vai taisnstūri (AX ∥ DY un XB ∥ YC), tātad vienādsānu. Tāpēc $\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4\end{array}\right\}$ kā leņķi pie pamatiem; $\angle 2 = \angle 3$ kā iekšējie šķērsleņķi. Tātad $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ un $\angle 5 = 180^0 - \angle 4 = 180^0 - \angle 1$. Tā kā $\angle 1 + \angle 5 = 180^0$, tad AD∥BC.

8. Ievērosim, ka

$$(a+b+c)(x+y+z) = (a+b+c)\left(\frac{10}{a} + \frac{10}{b} + \frac{10}{c}\right) =$$

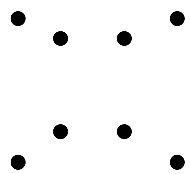
$$=30 + 10\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 10\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + 10\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

Savukārt ar nevienādību starp 2 pozitīvu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko pozitīviem x un y

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} = 2.$$

No šejienes viegli iegūt vajadzīgo pierādījumu.

9. Sk., piem., 13. zīm .



13.zīm.

10. <u>Atbilde.</u> n - 1.

<u>Risinājums.</u> Ja kāds no skolēniem draudzējas ar visiem pārējiem, bet nekādi divi no pārējiem savā starpā nedraudzējas, tad uzdevuma nosacījumi ir apmierināti un ir tieši n-1 draudzība. Pierādīsim, ka tas ir mazākais iespējamais draudzību skaits.

Aplūkosim skolēnu A un pieņemsim, ka tas draudzējas ar $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Apzīmēsim šo grupu ar B. Ar visiem pārējiem n-(1+k) skolēniem tātad A nedraudzējas. Apzīmēsim šo grupu ar X. Ja k=n-1, tad jau ir vismaz n-1 draudzība. Apskatīsim gadījumu, kad k<n-1. Lai apmierinātu uzdevuma nosacījumus, katram skolēnam S no X ir jādraudzējas ar vismaz vienu skolēnu no B (tā kā A ar S nedraudzējas, bet draudzējas ar visiem B_i, tad tikai skolēni no B var būt A un S kopējie draugi). Tādā gadījumā draudzību kopskaits būs vismaz k +(n - (1 + k)) = n - 1. Tātad mazāku draudzību skaitu par n - 1 iegūt nevar.

11. No dotā izriet, ka ap ABCD var apvilkt riņķa līniju. Bet tad ievilktie leņķi BCA un BDA balstās uz vienu un to pašu loku, tātad ir vienādi.

12. <u>Atbilde.</u> a) un c) jā;
b) nē.

<u>Risinājums.</u> Ja n-3 dalās ar 5, tad n-3 ir uzrakstāms formā n-3 = 5k jeb n = 5k+3, k - vesels skaitlis. Tātad n, dalot ar 5, dod atlikumā 3.

a) n-198 = 5k+3-198 = 5k-195 = 5(k-39) un tātad dalās ar 5;

b) $n^2-1 = (5k+3)^2-1 = 25k^2+30k+9-1 = 25k^2+30k+8$. Pirmie divi saskaitāmie ar 5 dalās, bet trešais - nē. Tātad arī summa ar 5 nedalās;

c) $n^2+1 = (5k+3)^2+1 = 25k^2+30k+10 = 5(5k^2+6k+2)$, kas parāda, ka izteiksme dalās ar 5.

13. Lietosim matemātisko indukciju. Pie $n=1$ un $n=2$ nevienādība pareiza. Pieņemsim, ka

$$k^k \geq 2^k \cdot k! \qquad (1),$$

un pierādīsim, ka

$$(k+1)^{k+1} \geq 2^{k+1} \cdot (k+1)! \qquad (2).$$

Acīmredzot, ja mēs pratīsim pierādīt, ka pie $k \geq 2$

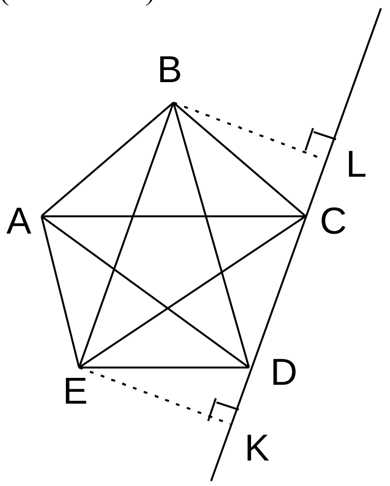
$$\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \geq 2(k+1) \qquad (3),$$

tad, sareizinot (3) un (1), iegūsim (2). Tāpēc pierādīsim (3):

$$(3) \Leftrightarrow 2 \leq \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \Leftrightarrow 2 \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k .$$

Izvēršot $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ pēc Ņūtona binoma formulas, pirmie divi locekļi ir *1* un $C_k^1 \cdot \frac{1}{k} = 1$; jau to summa ir *2*. Tā kā citi izvirzījuma locekļi (tie eksistē, jo $k \geq 2$) ir pozitīvi, vajadzīgais pierādīts.

14. Aplūkosim piecstūri ABCDE (sk. 14. zīm.).

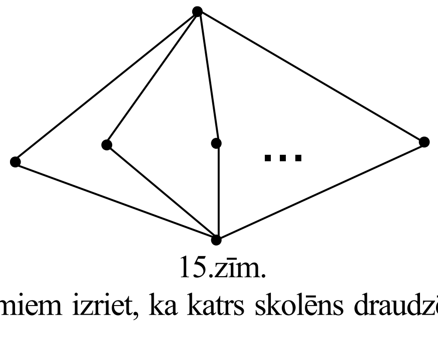


14. zīm.

Pieņemsim: dots, ka AC ‖ED, BD‖AE, CE ‖AB, AD ‖BC, un jāpierāda, ka BE‖CD. Mums pietiek pierādīt, ka BL=EK jeb, kas ir tas pats, ka [BCD]=[ECD] (*).

Ievērosim, ka [BCD]=[BCA] (jo BC‖AD); līdzīgi [BCA]=[BEA], [BEA]=[DEA], [DEA]=[DEC]. No šo vienādību virknes seko (*).

15. Attēlosim skolēnus ar punktiem, bet draudzēšanos - ar līnijām. 15. zīm. parādīts, ka meklējamais draudzību skaits var būt *2n-4.*



15.zīm.

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka katrs skolēns draudzējas ar vismaz *2* citiem. Ja katrs skolēns draudzētos ar vismaz *4* citiem, tad draudzību skaits būtu vismaz $\frac{n \cdot 4}{2} = 2n > n-4$.

Aplūkosim gadījumu, kad kādam skolēnam X ir tieši 2 draugi A un B. Pārējo skolēnu grupu apzīmēsim ar Y (tajā ir tieši *n-3* skolēni). Katram no Y skolēniem jādraudzējas gan ar A, gan ar B. Tāpēc draudzību skaits ir vismaz

2+2(n-3) = 2n-4.

Aplūkosim gadījumu, kad kādam skolēnam X ir tieši 3 draugi A, B un C. Tad katram no Y grupas *n-4* skolēniem (izņemot X;A;B;C) jādraudzējas vismaz ar diviem no A;B;C. Iegūstam, ka jābūt vismaz $3+2(n-4) = 2n-5$ draudzībām. Ievērojam, ka $2n-5 = (2n-4)-1$. Lai pierādītu, ka uzdevuma atbilde ir *2n-4*, mums jāpamato, ka tieši *2n-5* draudzības nevar būt.

Ievērosim, ka tieši *2n-5* draudzības var būt tikai tad, ja Y grupas ietvaros skolēni savā starpā nedraudzējas un ar katru skolēnu no Y grupas draudzējas tieši divi no A, B, C.

Pieņemsim, ka ir skolēns R, ar kuru draudzējas A un B, un ir arī skolēns S, ar kuru draudzējas B un C. Tad priekš R un S nav uzdevumā minēto *2* kopīgo draugu. Tāpēc visi *n-4* skolēni no Y draudzējas ar vieniem un tiem pašiem diviem no A,B,C; tā ir pretruna (attiecībā uz trešo no A, B un C) ar uzdevuma nosacījumiem.

16. Ja $\sin x = \sin y = 0$, tad $x=\pi k$, $y=\pi n$ ($k,n \in Z$), un tāpēc $\sin 1993x = \sin 1993y = 0$.

Ja $\sin x = \sin y \neq 0$, tad no $2 \sin x \cdot \cos x = 2 \sin y \cdot \cos y$ seko $\cos x = \cos y$. No $\sin x = \sin y$ un $\cos x = \cos y$ seko $x-y = 2\pi n$, $n \in Z$; no šejienes viegli iegūstama prasītā vienādība.

17. Atbilde. Šī summa ir 495000.

Risinājums. Tādu četrciparu skaitli, kam pirmais cipars vienāds ar pēdējo, bet otrais ar trešo, var uzrakstīt kā $\overline{abba} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + b \cdot 10 + a = 1001a + + 110b$. Ir skaidrs, ka *a* var pieņemt visas iespējamās vērtības no *1* līdz *9* (0 nevar būt pirmais cipars), bet *b* var pieņemt visas vērtības no *0* līdz *9*.

Tāpēc $S = 10 \cdot (1+2+3+\ldots+9) \cdot 1001 + 9 \cdot (1+2+\ldots+9) \cdot 110 = 495000$.

Reizinātājs *10* pirmajā saskaitāmajā parāda, ka cipara *a* katra vērtība kombinējas ar *10* dažādām cipara *b* vērtībām, bet reizinātājs *9* otrajā saskaitāmajā - ka cipara *b* katra vērtība kombinējas ar *9* dažādām cipara *a* vērtībām.

18. Apzīmēsim trijstūra malas ar $a \leq b \leq c$; tad tā augstumi apmierina sakarību $h_a \geq h_b \geq h_c$. Apzīmēsim punkta attālumus līdz malām atbilstoši ar *A, B* un *C*.

Izsakot trijstūra laukumu kā triju trijstūru laukumu summu, kurus iegūst, savienojot iekšpusē ņemto punktu ar sākotnējā trijstūra virsotnēm, iegūstam

$$\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot A}{2} + \frac{b \cdot B}{2} + \frac{c \cdot C}{2} \quad \text{jeb}$$

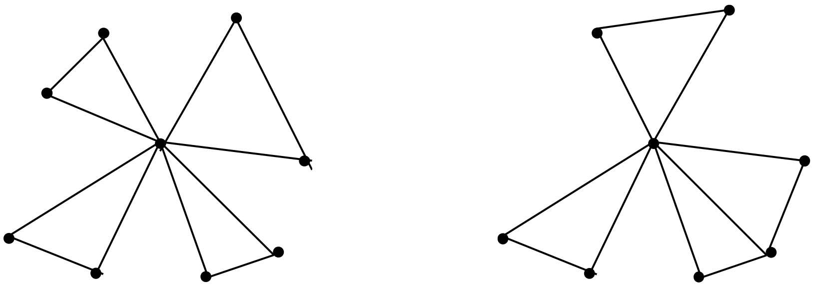
$$a \cdot h_a = a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \quad (*).$$

Saskaņā ar $a \leq b \leq c$ no (*) iegūstam $a \cdot h_a \geq a \cdot A + a \cdot B + a \cdot C$, no kurienes seko $h_a \geq A + B + C$. Līdzīgi iegūstam $c \cdot h_c \leq c \cdot A + c \cdot B + c \cdot C$ un $h_c \leq A + B + C$.

19. Jā, eksistē. Saliksim kopā ar pamatiem 2 regulāras desmitstūru piramīdas. Tātad būs izliekts daudzskaldnis ar 20 skaldnēm, kas visas ir trijstūri. Pie katras otrās "pamata" virsotnes nogriezīsim "mazu" četrstūrveida šķēlumu - radīsies 5 jaunas skaldnes, bet visas vecās kļūs par četrstūriem.

20. Attēlosim skolēnus ar punktiem, bet draudzības - ar līnijām.

16. zīm. parādīts, ka draudzību skaits var būt $n-1+\left[\frac{n}{2}\right]$.



n - nepāra (*n*=9) *n* - pāra (*n*=8)

16. zīm.

Parādīsim, ka tas nevar būt mazāks.

No uzdevuma nosacījumiem acīmredzami izriet, ka katrs skolēns draudzējas ar vismaz vienu citu. Pieņemsim, ka kāds skolēns A draudzējas tikai ar vienu citu B; tad pārim (A,B) nevar atrast tādu skolēnu, kas draudzētos ar tiem abiem - pretruna.

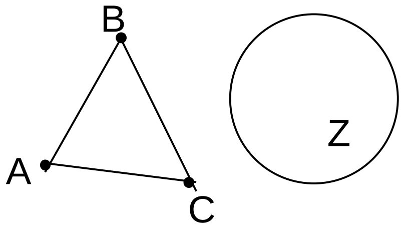
Tāpēc katrs skolēns draudzējas ar vismaz diviem citiem.

Tālāk šķirosim 2 gadījumus.

1) Katrs no n skolēniem draudzējas ar vismaz trim citiem. Tad draudzību kopskaits ir vismaz $\frac{3n}{2}$, bet

$$\frac{3n}{2} > n-1+\left[\frac{n}{2}\right], \text{ jo } n-1+\left[\frac{n}{2}\right] \le n-1+\frac{n}{2} = \frac{3n}{2} - 1.$$

2) Eksistē tāds skolēns A, kas draudzējas tikai ar diviem citiem - B un C. Pārējos skolēnus apvienosim grupā Z.



17. zīm.

Tādā gadījumā B draudzējas ar C. Ja tā nebūtu, tad priekš pāra AB nevarētu atrast skolēnu, kas draudzējas ar abiem. Tātad grupas {A,B,C} ietvaros ir 3 draudzības.

Aplūkosim skolēnu pāri AX, kur X ir no Z. Pēc uzdevuma nosacījumiem, kādam no skolēniem jādraudzējas gan ar A, gan ar X. Tā kā A vienīgie draugi ir B un C, tad X ir jādraudzējas vai nu ar C, vai ar B. Tātad katram X no grupas Z eksistē vai nu draudzība XC, vai XB.

Nofiksēsim katram X no Z vienu draudzību (vai nu ar B, vai ar C); sauksim šīs draudzības par primārajām.

Primāro draudzību ir vismaz *n-3.*

Pierādīsim, ka katram X no Z ir jābūt vismaz vēl vienai draudzībai bez primārās. Tiešām, ja, piemēram, X būtu tikai primārā draudzība (pieņemsim, ar B), tad pārim BX neizpildītos uzdevuma nosacījumi. Tātad skolēnam X ir vēl vismaz viena draudzība; sauksim to par sekundāro.

Noskaidrosim, cik ir sekundāro draudzību. Grupā Z ir *n-3* skolēni. Ja *n-3* ir pāra skaitlis, tad vismazākais iespējamais sekundāro draudzību skaits ir $\frac{n-3}{2}$ (ja katra sekundārā draudzība saista divus skolēnus no Z). Viegli pārbaudīt: ja n-3 ir pāra skaitlis, tad $\frac{n-3}{2} = \left[\frac{n}{2}\right] - 1$. Ja turpretī *n-3* ir nepāra skaitlis, tad vismazākais sekundāro draudzību skaits ir gadījumā, ja vienam skolēnam no Z sekundārā draudzība ir ārpus Z, bet pārējos Z skolēnus sekundārās draudzības saista pa pāriem; tad sekundāro draudzību skaits ir $\frac{n-4}{2} + 1 = \frac{n-2}{2}$. Tā kā *n-3* ir nepāra skaitlis, tad *n* ir pāra skaitlis; tāpēc $\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1 = \left[\frac{n}{2}\right] - 1$.

Tātad visos gadījumos sekundāro draudzību ir vismaz $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$.

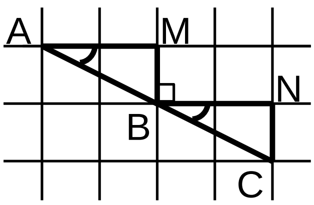
Tāpēc draudzību kopskaits ir vismaz

$$3+(n-3)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right) = n-1+\left[\frac{n}{2}\right],$$ ko arī vajadzēja pierādīt.

Rajona olimpiāde (21. – 40.)

21. Pārveidojam vienādojumu par $(x-a)^2 + (x-b)^2 = 0$. Tā kā $a \neq b$, tad vai nu $x-a \neq 0$, vai arī $x-b \neq 0$. Tātad $(x-a)^2 + (x-b)^2 > 0$, un vienādojumam atrisinājumu nav.

22.



18. zīm.

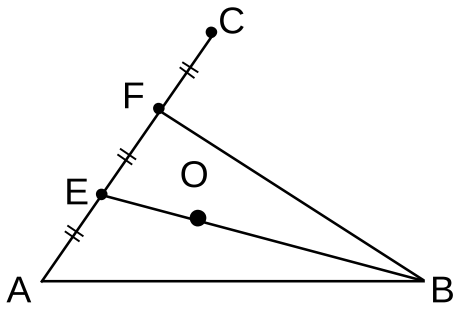
Izveidosim divus trijstūrus - ΔAMB un ΔBNC. Tā kā plakne sadalīta kvadrātos un šo trijstūru malas iet pa rūtiņu līnijām, tad trijstūri ir taisnleņķa. Tā kā AM=BN, bet MB=NC, tad ΔAMB=ΔBNC. Tādā gadījumā $\angle MAB = \angle NBC$. Ievērosim, ka $\angle ABM = 90^0 - \angle MAB$. Tāpēc $\angle ABM + \angle MBN + \angle NBC = 90^0 - \angle MAB + 90^0 + \angle NBC = 180^0$. Tas nozīmē, ka punkti A, B un C atrodas uz vienas taisnes.

23. Ievērosim, ka

$$x^2 < x^2+x < x^2+2x+1 = (x+1)^2 .$$

Tas nozīmē, ka x^2+x atrodas starp divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu kvadrātiem. Tātad x^2+x nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts un vienādojumam nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

24. Aplūkosim nogriezni AB (sk. 19. zīm.), kuru vēlamies sadalīt uz pusēm. Novelkam nogriezni AC. Ar trisektoru sadalām to trīs vienādās daļās: AE=EF=FC. Tādā gadījumā E ir AF viduspunkts. Tātad BE ir trijstūra AFB mediāna.



19. zīm.

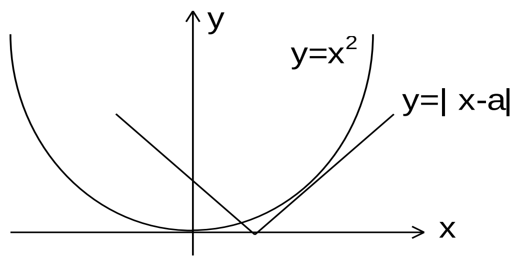
Ar trisektoru atrodam tādu O uz EB, ka EO = $\frac{1}{3}$ EB. Tā kā mediānas krustpunktā dalās attiecībā 2:1 (sākot no virsotnes), tad O ir ΔAFB mediānu krustpunkts. Atrodam taisnes FO krustpunktu G ar AB. Tad FG ir ΔAFB mediāna, un G ir AB viduspunkts.

25. Tā kā uzdevuma noteikumos pieļaujamās blakusskaitļu starpības ir 4, 5, 6 vai 7, tad nevienā vietā blakus nevar atrasties nekādi divi no skaitļiem 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 15. Tā kā skaitļi uzrakstīti pa apli, tad starp šiem skaitļiem ir 8 atstarpes. Taču palikuši neizmantoti tikai 7 skaitļi, un katrā no minētajām 8 atstarpēm jāatrodas vismaz vienam no 7 vēl neizmantotajiem skaitļiem. Tātad uzdevuma prasība nav izpildāma.

26. Viegli aprēķināt, ka [AMB] = $\frac{1}{4}$. Tā kā $\Delta BSC \sim \Delta MSA$ un līdzības koeficients ir 2:1, tad SM = $\frac{1}{3}$BM. Trijstūriem ABM un ASM ir kopīgs augstums pret malām BM un SM, tāpēc to laukumi attiecas tāpat kā šo malu garumi. Tāpēc [ASM] = $\frac{1}{3}$[ABM] = $\frac{1}{12}$.

27. Uzzīmēsim funkciju $y=x^2$ un $y=|x-a|$ grafikus, ja $a>0$. Ja grafikiem būs tieši 3 kopēji punkti, tad vienādojumam $x^2=|x-a|$ būs tieši 3 atrisinājumi, un otrādi.

Acīmredzami grafikiem būs 3 kopīgi punkti tad un tikai tad, ja viens $y=|x-a|$ grafika zars pieskarsies parabolai, bet otrs krustos to divos punktos (sk. 20. zīm.).



20. zīm.

Ja $y=|x-a|$ labais zars pieskaras parabolai, tas nozīmē, ka vienādojumam $x^2=x-a$ ir viens atrisinājums. Pielīdzinot diskriminantu nullei, iegūstam $a=\frac{1}{4}$.

Analogi, ja $a<0$, iegūstam $a=-\frac{1}{4}$.

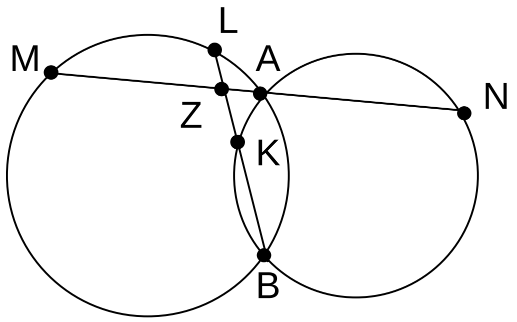
Pārbaudot $a=0$, redzam, ka arī šai gadījumā vienādojumam ir 3 atrisinājumi. Tātad der $a=0$ un $a=\mp\frac{1}{4}$.

28. To, ka a un b veido pāri, apzīmēsim ar a~b. Ir skaidrs, ka 18 jāapvieno vienā pārī ar 7 (18~7), 17~8, 16~9. Skaitlim 15 iespējami divi varianti: 15~10 vai 15~1. Ja 15~10, tad 6~3, jo iespējams tikai 6~3 vai 6~10. Tad skaitlim 1 starp atlikušajiem skaitļiem 2, 4, 5, 11, 12, 13, 14 nav atbilstoša pāra. Tāpēc 15~1. Parādīsim ar piemēra palīdzību, ka visus skaitļus iespējams apvienot šādos pāros: 1~15, 2~14, 3~13, 4~12, 5~11, 6~10, 7~18, 8~17 un 9~16.

29. a) Aplūkosim pirmās 10 vietas rindā. Ja pirmajā vietā stāv meitene, tad kādā no nākamajām 10 vietām noteikti stāv zēns, pretējā gadījumā meiteņu skaits būtu lielāks par 10. Samainām šos divus bērnus vietām. Tagad pirmajā vietā stāv zēns. Aplūko otro bērnu rindā. Ja tā ir meitene, rīkojas analogi iepriekšējam. Ja k-jā vietā stāv meitene ($1 \le k \le 10$), tad kādā no vietām ar numuriem k+1, k+2, … , k+10 stāv zēns. Mainot šos bērnus vietām, k-jā vietā nostādām zēnu. Tā kā rindā ir 10 meitenes, tad ar 10 maiņām noteikti pietiek.

b) Ja pirmajās 10 vietās stāv 10 meitenes, tad ir vajadzīgas vismaz 10 maiņas, jo ar vienu maiņu tiek "izlabota", lielākais, 1 nepareizība, bet to ir 10.

30.



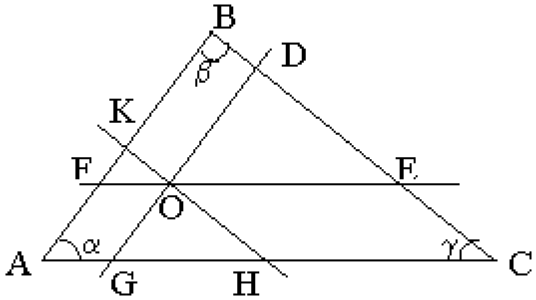
21.zīm.

Izmantosim hordu nogriežņu īpašību un sekantes nogriežņu īpašību. Attiecībā pret pirmo riņķa līniju MZ·ZA = LZ·ZB. Attiecībā pret otru riņķa līniju ZK·ZB = ZA·ZN. Tā kā ZM=ZN, tad LZ·ZB = MZ·ZA =AZ ·ZN = ZK·ZB. Tātad LZ=ZK (sk. 21. zīm.).

31. Sāksim pārveidojumus no "otra gala":

$$y^8-x^8 = (y^4-x^4)(y^4+x^4) = (y^2-x^2)(y^2+x^2)(y^4+x^4) =$$
$$= (y-x)(y+x)(y^2+x^2)(y^4+x^4) = (y+x)(y^2+x^2)(y^4+x^4).$$

32.



22. zīm.

$[AFOG] = AF \cdot AG \cdot \sin\alpha;$

$[HCEO] = CE \cdot CH \cdot \sin\gamma;$

$[OKBD] = BK \cdot BD \cdot \sin\beta.$

Apskatām ΔOFK: $\angle$FOK = $\angle$HOE = $\angle$HCE = γ.

Tāpēc [OFK] = $\frac{1}{2}\cdot FO\cdot OK\cdot \sin\gamma$.

Analogi iegūstam [ODE]=$\frac{1}{2}\cdot OD\cdot OE\cdot\sin\alpha$, [GOH]=$\frac{1}{2}\cdot GO\cdot OH\cdot\sin\beta$. Tālāk [OFK]·[ODE]·[GOH] $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot FO\cdot OK\cdot GO\cdot OH\cdot OD\cdot OE\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

Ievērojot, ka AG=OF, OK=BD, GO=AF, OH=CE, OD=BK un OE=CH, iegūstam vajadzīgo.

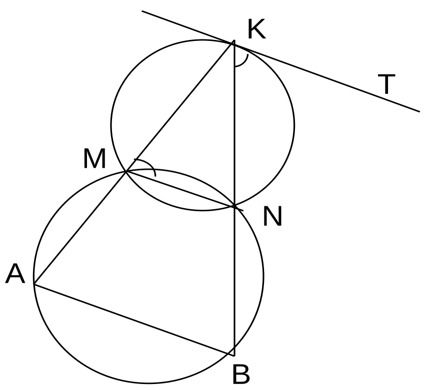
33. Ja d ir skaitļa n dalītājs, tad arī $\frac{n}{d}$ ir skaitļa n dalītājs. Ja $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ir visi skaitļa n dalītāji, tad arī skaitļi $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \frac{n_3}{d_3}\cdots\frac{n_k}{d_k}$ ir tie paši visi skaitļa n dalītāji (citā secībā).

Pareizināsim abas pierādāmās vienādības puses ar $\sqrt{n}$; iegūsim

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n \;=\; \frac{n}{d_1}+\frac{n}{d_2}+\cdots+\frac{n}{d_k}.$$

Kā vienā, tā otrā vienādības pusē ir skaitļa n visu dalītāju summa. Tās, protams, ir vienādas.

34.



23. zīm.

Lai pierādītu uzdevumā prasīto, varam pierādīt, ka $\angle$ABN = $\angle$BKT (šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm). Pēc teorēmas par ievilktu leņķi ($\angle$KMN), kas balstās uz hordu (KN), un šīs hordas galapunktā vilktās pieskares un hordas leņķi ($\angle$TKN), $\angle$TKN = $\angle$KMN (sk. 23. zīm.).

Tā kā AMNB ir riņķa līnijā ievilkts četrstūris, tad $\angle$ABN+$\angle$AMN=180^0 jeb $\angle$AMN=180^0-$\angle$ABN. No otras puses, $\angle$AMN=180^0-$\angle$NMK (blakusleņķis). Tātad 180^0-$\angle$ABN = 180^0-$\angle$NMK jeb $\angle$ABN=$\angle$NMK. Tā kā $\angle$NMK=$\angle$TKN, tad $\angle$ABN=$\angle$TKN, ko arī vajadzēja pierādīt.

35. Liekam sainīšus maisā katram no astoņiem Salavečiem tik ilgi, līdz katram Salavecim sainīšu kopsvars pārsniedz 25 kg; tad pēdējo ielikto sainīti izņemam ārā un noliekam malā. Tātad šiem 8 Salavečiem katram dāvanu maisa svars nepārsniedz pieļaujamo. Vēl neaiztikto sainīšu kopsvars ir mazāks par 225 - 8·25 = 25 kg, jo visiem 8 Salavečiem maisos tika "mēģināts ielikt" vairāk par 25 kg. Šos 25 kg var iedot devītajam Salavecim. Tātad ir palikuši neaiznesti 8 dāvanu sainīši (kas tika atlikti malā, komplektējot pirmo 8 Salaveču maisus). Tā kā katra sainīša svars nepārsniedz 3 kg, tad šos 8·3 = 24 kg var aiznest desmitais Salavecis.

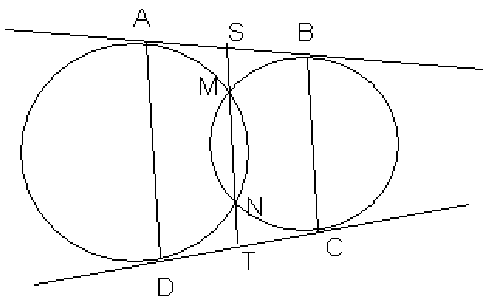
36. Tā kā visiem t pastāv nevienādība |cost|≤1, tad x var būt vienādojuma atrisinājums tikai tad, ja |cosx|=1, |cos2x|=1 un |cos3x|=1. Pretējā gadījumā reizinājums noteikti būs mazāks par 1.

Ja cosx=1, tad x=2πn, $n \in Z$. Pārbaude rāda, ka šis atrisinājums der. Ja cosx = - 1, tad x=π+2πn, $n \in Z$; pārbaude rāda, ka arī šis atrisinājums der. Tātad x=πk, $k \in Z$.

37. Tieša pārbaude parāda, ka *n=1;2;4* neder, bet *n=3* der. Ja *n>4,* tad *n=4k+r,* kur $k \in N$ un $r \in \{0;1;2;3\}$, t.i., mēs aplūkojam iespējamos *n* atlikumus, dalot *n* ar *4.* Ja *r=0,* tad $\left[\frac{n^2}{4}\right] = \left[\frac{16k^2}{4}\right] = \left[4k^2\right] = 4k^2$, kas nav pirmskaitlis, jo satur divus pirmreizinātājus *2.* Ja *r=1,* tad $\left[\frac{n^2}{4}\right] = \left[4k^2 + 2k + \frac{1}{4}\right] = 2\left(2k^2 + k\right)$, kas nav pirmskaitlis, jo dalās ar *2* un ir lielāks par *2.* Ja *r=2,* tad $\left[\frac{n^2}{4}\right] = (2k+1)^2$, tātad dalās ar *1; 2k+1;* $(2k+1)^2$ un nav pirmskaitlis.
Ja *r=3,* tad
$\left[\frac{n^2}{4}\right] = \left[4k^2 + 6k + 2\frac{1}{4}\right] = 2\left(2k^2 + 3k + 1\right)$, tātad nav pirmskaitlis, jo ir lielāks par *2* un dalās ar *2.*

Tātad vienīgā šāda vērtība ir *n=3.*

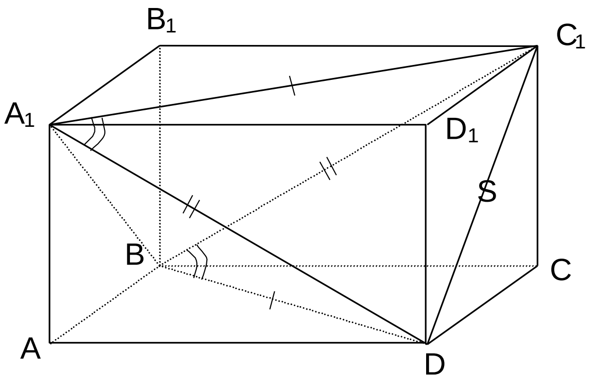
38.



24. zīm.

Pieņemsim, ka taisne MN krusto AB punktā S (sk. 24. zīm.). Izmantosim teorēmu par sekanti un pieskares kvadrātu; iegūsim $SA^2=SM \cdot SN$ un $SB^2= SM \cdot SN$, tātad SA=SB. Analogi varam pierādīt, ka DT=TC. Tātad M un N atrodas uz ABCD viduslīnijas.

39.



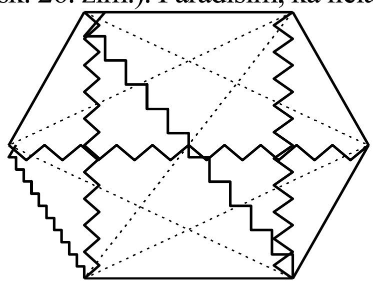
25. zīm.

Pierādīsim, ka $\angle A_1BC_1 + \angle C_1BD + \angle DBA_1 = 180^0$ (sk. 25. zīm.).

No tā, ka $BC_1=DA_1$ un $A_1C_1=DB$ (vienādu taisnstūru diagonāles) seko, ka $\Delta C_1A_1D = \Delta DBC_1$. Tāpēc $\angle C_1BD = \angle C_1A_1D$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle A_1BC_1 = \angle A_1DC_1$ un $\angle DBA_1 = \angle DC_1A_1$.

Bet $\angle C_1A_1D + \angle A_1DC_1 + \angle DC_1A_1 = 180^0$, jo tie ir ΔA_1DC_1 iekšējie leņķi.

40. Daudzstūrim var būt 6 malas (sk. 26. zīm.). Parādīsim, ka lielāks malu skaits tam nevar būt.



26. zīm.

Pieņemsim, ka minētajam daudzstūrim ir n malas, tātad arī n virsotnes. Tad katrā krāsā var būt ne vairāk kā *(n-1)* nogrieznis (jo grafā ar n virsotnēm un $\geq n$ šķautnēm noteikti eksistē noslēgts cikls). Tātad malu un diagonāļu kopskaits nepārsniedz *3(n-1).* Bet jebkurā n-stūrī malu un diagonāļu kopskaits ir $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Tātad jābūt $\dfrac{n(n-1)}{2} \leq 3(n-1)$, no kurienes $n \leq 6$.

44. Valsts olimpiādes 3. kārta (41. – 60.)

41. Pārveidojot iegūstam

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

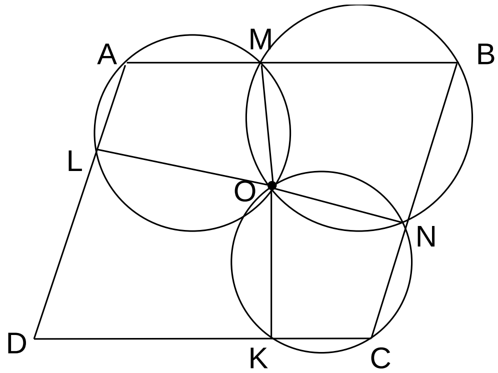
Tā kā p - pārskaitlis, tad $\dfrac{p}{2}$ - vesels skaitlis. Tāpēc, ja $x = -\dfrac{p}{2}$, tad y jābūt lielākam vai vienādam ar 0. Tas nozīmē, ka

$$\left(-\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \geq 0;$$

$$\left(q-\frac{p^2}{4}\right) \geq 0.$$

Visiem x izpildās $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$. Tāpēc visiem x arī $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right) \geq 0$, t.i., $x^2+px+q \geq 0.$

42. Izmantosim skolas ģeometrijas kursā apgūtu teorēmu: ap četrstūri $A_1A_2A_3A_4$ riņķa līniju var apvilkt tad un tikai tad, ja $\angle A_1+\angle A_3=180^0$.
Četrstūris AMOL ir ievilkts riņķa līnijā. Tāpēc $\angle A+\angle MOL=180^0$, $\angle MOL=180^0-\angle A$. Līdzīgi $\angle MON=180^0-\angle B$ un $\angle NOK=180^0-\angle C$.



27. zīm.

Četrstūra leņķu summa ir 360^0.
Tāpēc $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D = 360^0$; $\angle D= 360^0-\angle A-\angle B-\angle C$;
$\angle LOK=360^0-\angle MOL-\angle MON-\angle NOK = \angle A+\angle B+\angle C-180^0 =$
$= 180^0 - (360^0 - \angle A - \angle B - \angle C) = 180^0 - \angle D.$
Tātad $\angle LOK+\angle D = 180^0$.
Tādējādi četrstūri DLOK var ievilkt riņķa līnijā, t.i., D, L, O un K atrodas uz vienas riņķa līnijas.

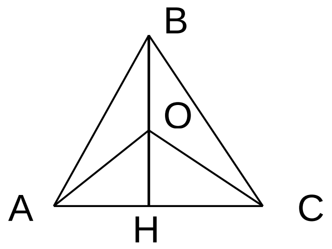
43. a) $n^5-n = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$.
Skaitļi n-1, n un n+1 ir 3 pēc kārtas esoši naturāli skaitļi, tāpēc viens no tiem dalās ar 3. Tādēļ arī n^5-n dalās ar 3.
Var pārbaudīt, ka n^5 un n pēdējie cipari vienmēr ir vienādi. Tāpēc n^5-n dalās ar 10.
Skaitļi 3 un 10 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tāpēc n^5-n dalās ar $3\cdot10=30$.
b) $120=8\cdot15$, 8 un 15 ir savstarpēji pirmskaitļi.
Tā kā n^5-n dalās ar 30 un 30 dalās ar 15, tad n^5-n vienmēr dalās ar 15. Atliek noskaidrot, kad n^5-n dalās ar 8.
1) n - nepāra skaitlis. Tad (n-1), (n+1) un (n^2+1) visi ir pārskaitļi, t.i., visi dalās ar 2. Tāpēc to reizinājums $(n-1)(n+1)(n^2+1)$ un arī
$n^5-n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ dalās ar $2\cdot2\cdot2=8$. Tā kā n^5-n dalās ar 15, tas dalās arī ar $15\cdot8=120$.
2) n dalās ar 8. Tad $n^5-n = n(n^4-1)$ arī dalās ar 8. No tā izriet, ka n^5-n dalās ar 120.
3) n - pāra, bet nedalās ar 8. Tad n^4 - pāra skaitlis, bet n^4-1 - nepāra. Tāpēc $n^5-n=n(n^4-1)$ - pāra, bet nedalās ar 8.
Taču, ja n^5-n dalās ar 120, tad tas dalās ar 8, jo 120 dalās ar 8. Tāpēc šajā gadījumā n^5-n nedalās ar 120.

44. Apgalvojums. Jebkuru trijstūri var sagriezt platleņķa trijstūros.

Pierādījums. Pieņem, ka dots trijstūris ABC ar lielāko leņķi B. Novelk tajā augstumu BH; tas atrodas ABC iekšpusē. Izvēlas uz šī augstuma punktu O tuvu punktam H. Tad $\angle$AOC būs gandrīz 180^0 un ΔAOC - platleņķa trijstūris. ΔAOB būs platleņķa, jo

$\angle AOB = 180^0 - \angle AOH = 180^0 - (180^0 - 90^0 - \angle OAH) = 90^0 + \angle OAH > 90^0$.

Līdzīgi platleņķa trijstūris būs arī ΔBOC.



28. zīm.

Tādējādi trijstūri ABC var sagriezt platleņķa trijstūros AOB, AOC, BOC.

Jebkuru daudzstūri var pa diagonālēm sagriezt trijstūros. Jebkuru no šiem trijstūriem var sagriezt platleņķa trijstūros. Tādā veidā jebkuru daudzstūri var sagriezt platleņķa trijstūros.

45. Nē, nevar.

Pierādījums. Katrs gājiens izmaina konfekšu skaitu visos grozos. Turklāt konfekšu skaits grozā vai nu samazinās par 1, vai pieaug par 5, t.i., tas vienmēr mainās par nepāra skaitli. Tādēļ, ja grozā pirms gājiena ir pāra skaits konfekšu, tad pēc tā grozā būs nepāra skaits konfekšu un, ja pirms gājiena grozā ir nepāra skaits, tad pēc tā grozā būs pāra skaits konfekšu.

Apgalvojums. Pēc katra gājiena 3 grozos ir pāra skaits konfekšu un 3 grozos nepāra skaits konfekšu.

Pierādījums. Sākumā 3 grozos ir pāra skaits konfekšu - 32, 34 un 36 un 3 grozos - nepāra - 31, 33 un 35.

Izdarot gājienu, 3 grozos konfekšu skaits mainās no pāra skaita uz nepāra un 3 grozos - no nepāra uz pāra. Tādējādi arī pēc gājiena 3 grozos ir pāra skaits konfekšu un 3 grozos - nepāra, kbj.

Ja visas konfektes atrastos vienā vai divos grozos, tad pārējos 4 vai 5 grozos būtu 0, t.i., pāra skaits konfekšu. Taču, kā mēs jau pierādījām, pāra skaits konfekšu var vienlaikus būt tikai 3 grozos. Tādēļ panākt, lai visas konfektes būtu vienā vai divos grozos, nevar.

46. Pēc Vjeta teorēmas sakņu summa vienādojumam $x^2+px+q=0$ vienāda ar $(-p)$ un reizinājums - ar q. Tādēļ

$$\begin{cases} 2p+2q=-p \\ 2p\cdot 2q=q \end{cases}.$$

No pirmās vienādības seko, ka

$$3p+2q=0,\quad 2q=-3p,\quad p=-\frac{2}{3}q.$$

Ievietojot otrajā vienādībā, iegūst

$$2\left(-\frac{2}{3}q\right)\cdot 2q=q;\quad -\frac{8}{3}q^2=q.$$

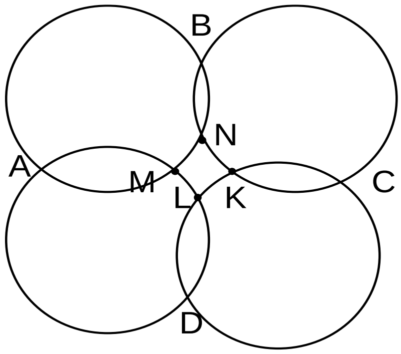
No šejienes $q=0$ vai $q=-\dfrac{3}{8}$.

Ja $q=0$, tad $p=0$. Ja $q=-\dfrac{3}{8}$, tad $p=-\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Tādēļ $p=\frac{1}{4}$, $q=-\frac{3}{8}$ vai $p=q=0$. Pārbaude rāda, ka abas atbildes der.

47. Ir zināms, ka ap četrstūri ABCD riņķa līniju var apvilkt tad un tikai tad, ja $\angle A+\angle C=180^0$.

Tā kā uzdevuma nosacījumā dots, ka ap četrstūri ABCD var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle A+\angle C=180^0$; $\angle A=\angle BAM+\angle MAD$; $\angle C=\angle BCK+\angle KCD$. Tā kā četrstūris BNMA ir ievilkts riņķa līnijā, tad $\angle BAM+\angle BNM=180^0$ un $\angle BNM=180^0-\angle BAM$.



29.zīm.

Līdzīgi var pierādīt, ka

$\angle BNK=180^0-\angle BCK$;

$\angle DLK=180^0-\angle KCD$;

$\angle DLM=180^0-\angle MAD$.

Tā kā leņķi $\angle MNK$, $\angle KNB$ un $\angle BNM$ kopā veido pilnu leņķi, t.i., 360^0, tad

$\angle MNK=360^0-\angle KNB-\angle BNM=360^0-(180^0-\angle BCK)-(180^0-\angle BAM) =$

$=\angle BCK+\angle BAM$.

Līdzīgi,

$\angle MLK=360^0-\angle MLD-\angle DLK=\angle KCD+\angle MAD$.

Tādēļ

$\angle MNK+\angle MLK=\angle BCK+\angle KCD+\angle BAM+\angle MAD=\angle C+\angle A=180^0$.

Tāpēc ap četrstūri MNKL var apvilkt riņķa līniju.

48. 1) Ja skaitli n var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu, tad $n=x^2+y^2$. Tad

$(x+y)^2+(x-y)^2 = x^2+y^2+2xy+x^2+y^2-2xy = 2(x^2+y^2) = 2n.$

2) Ja skaitli $2n$ var izsacīt kā divu veidu skaitļu kvadrātu summu, tad $2n=x^2+y^2$.

Ja x ir nepāra skaitlis, tad arī x^2 un $2n-x^2=y^2$ ir nepāra skaitļi. Tādēļ šajā gadījumā arī y - nepāra.

Ja x - pāra skaitlis, tad arī y - pāra.

Tādēļ gan $x+y$, gan $x-y$ ir pārskaitļi un $\frac{x+y}{2}$ un $\frac{x-y}{2}$ - veseli skaitļi. Tā kā

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2n = n,$$

tad n var izteikt kā veselu skaitļu $\frac{x-y}{2}$ un $\frac{x+y}{2}$ kvadrātu summu.

49. Pierādām no pretējā. Pieņem, ka kaut kāds izliekts daudzstūris ir sagriezts ieliektos četrstūros.

Sauksim ieliekta četrstūra atvērtā leņķa (tā leņķa, kas lielāks par 180°) virsotni par īpašo punktu. Visi īpašie punkti atrodas daudzstūra iekšienē. Tā kā daudzstūris ir izliekts, tie nevar sakrist ar daudzstūra virsotnēm.

Apzīmējam griežot iegūto ieliekto četrstūru skaitu ar n. Tad ir n atvērtie leņķi un n īpašie punkti. Ap katru īpašo punktu pilnais leņķis ir pilnībā nosegts ar ieliekto četrstūru leņķiem. Šo leņķu summa ir vienāda ar pilno leņķi, t.i., 360^0. Tas nozīmē, ka n pilno leņķu nosegšanai vajag ieliekto četrstūru leņķus ar lielumu summu $360^0 \cdot n$, t.i., visus n ieliekto četrstūru leņķus.

Bet daži četrstūru leņķi ir vajadzīgi arī sākotnējā daudzstūra leņķu "nosegšanai". Iegūta pretruna.

50. a) Sākumā nokrāso melnā krāsā to rindiņu, kurā ir visvairāk zvaigznīšu. Tad nokrāso to rindiņu no pārējām, kurā ir visvairāk zvaigznīšu. Tā turpina līdz brīdim, kamēr nokrāsotas n rindiņas.

Apgalvojums. Pārējās n rindiņās kopā ir ne vairāk par n zvaigznītēm.

Pierādījums. Apskata 2 gadījumus.

1) Pēdējā nokrāsotajā rindiņā ir vismaz 2 zvaigznītes. Tad, tā kā katru reizi nokrāsošanai izvēlas to rindiņu, kurā ir visvairāk zvaigznīšu, katrā no nokrāsotajām rindiņām ir vismaz 2 zvaigznītes. Kopā nokrāsotajās rindiņās ir vismaz $2 \cdot n$ zvaigznītes un nenokrāsotajās - ne vairāk kā $3n-2n=n$ zvaigznītes.
2) Pēdējā nokrāsotajā rindiņā ir tikai 1 zvaigznīte. Tad katrā no nenokrāsotajām rindiņām ir ne vairāk kā 1 zvaigznīte (ja kādā no tām būtu vairāk zvaigznīšu, tad tā tiktu nokrāsota pēdējās nokrāsotās rindiņas vietā). Tas nozīmē, ka n nenokrāsotajās rindiņās kopā ir ne vairāk kā n zvaigznītes.

Ne vairāk kā n zvaigznītes, kas atrodas nenokrāsotajās rindiņās, var nokrāsot, nokrāsojot n kolonnas.

b) Jā, var (sk. 30. zīm.).

*	*				
	*	*			
		*	*		
*			*		
				*	
					*

30. zīm.

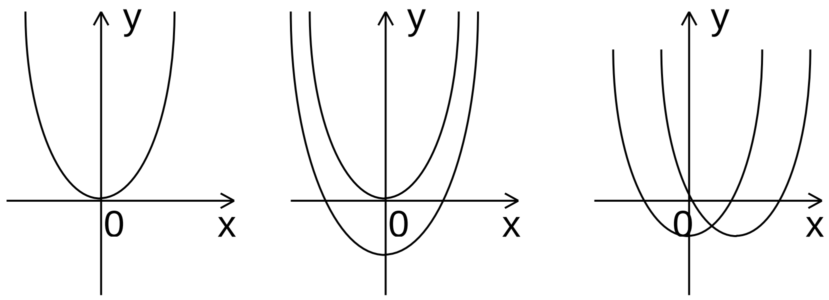
51. Ir iespējami 3 gadījumi:

a) parabolas sakrīt. Tad plakne tiek sadalīta 2 daļās;

b) parabolas nekrustojas. Tad viena parabola sadala plakni 2 daļās. Otra parabola sadala vienu no šīm daļām 2 daļās. Kopā veidojas 3 daļas;

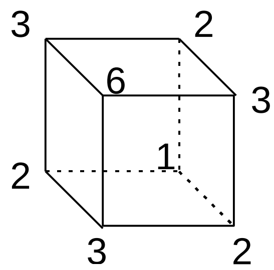
c) parabolas krustojas vienā punktā. Tad viena parabola sadala plakni 2 daļās. Otra parabola sadala katru no šīm daļām 2 daļās. Veidojas 4 daļas.

Parabolas nevar krustoties vairāk nekā 1 punktā, jo tad vienādojumam $x^2+px+q = x^2+ax+b$ jeb $px+q = ax+b$ būtu vairāk par 1 atrisinājumu, bet tas ir iespējams tikai, ja $p=a$ un $q=b$, t.i., ja parabolas sakrīt.



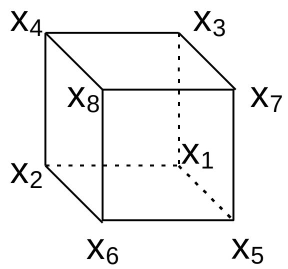
31.zīm.

52. a)



32. zīm.

b) Apzīmē kuba virsotnēs ierakstītos skaitļus ar $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$ (sk. 33. zīm.).



33. zīm.

Pierāda no pretējā, ka skaitļus virsotnēs tādā veidā ierakstīt nevar. Ja skaitļi virsotnēs būtu ierakstīti tā, lai visās 8 virsotnēs tie būtu mazāki par savu triju kaimiņu aritmētisko vidējo, tad izpildītos nevienādības

$x_1<(x_2+x_3+x_5)/3$;

$x_2<(x_1+x_4+x_6)/3$;

....

$x_8<(x_4+x_6+x_7)/3$.

Summējot šīs nevienādības, iegūst

$x_1+x_2+\ldots+x_8 < x_1+x_2+\ldots+x_8$.

Tas nav iespējams. Pretruna.

Citu pierādījumu var iegūt, aplūkojot vislielāko no virsotnēs ierakstītajiem skaitļiem: tas nevar būt mazāks par kaimiņu vidējo aritmētisko.

53. Pieņem, ka $x \geq y$ (citādi varētu apmainīt x un y vietām).

$3^x+3^y+1 = z^2$;

$3^x+3^y = z^2-1$;

$3^y(3^{x-y}+1) = (z-1)(z+1)$.

3^{x-y} ir nepāra skaitlis. Tādēļ $3^{x-y}+1$ un $3^y(3^{x-y}+1)$ ir pāra skaitļi. Tas nozīmē, ka arī $(z-1)(z+1)$ jābūt pāra skaitlim. Tas iespējams tikai, ja z - nepāra. Tādā gadījumā gan z-1, gan z+1 ir pārskaitļi, bet z-1 un z+1 ir divi pēc kārtas esoši pārskaitļi, tādēļ viens no tiem dalās ar 4.

Esam pierādījuši, ka viens no z-1 un z+1 dalās ar 4, bet otrs - ar 2. Tāpēc to reizinājums $(z-1)(z+1)$ dalās ar $4 \cdot 2=8$.

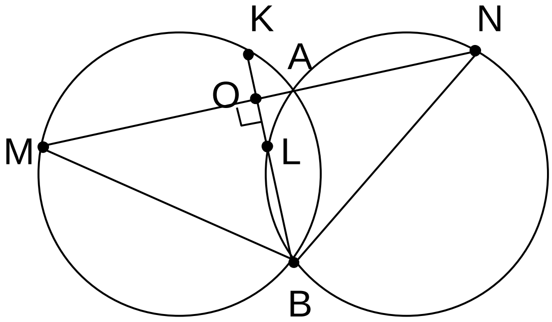
Tas nozīmē, ka arī $3^y(3^{x-y}+1)$ dalās ar 8, t.i., $3^{x-y}+1$ dalās ar 8.

Taču 3^{x-y}, dalot ar 8, dod atlikumus 3, 1, 3, 1,… (3, ja x-y ir nepāra, 1 - tad, ja x-y ir pāra). Tādēļ $3^{x-y}+1$, dalot ar 8, dod atlikumu 4 vai 2. Tas nozīmē, ka $3^{x-y}+1$ nevar dalīties ar 8.

Esam ieguvuši pretrunu. Tas nozīmē, ka vienādojumam $3^x+3^y+1=z^2$ nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

54. Tā kā riņķa līnijas ir vienādas, loki AB abās riņķa līnijās ir vienādi.

Tādēļ $\angle AMB=\angle ANB$ (kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem) un ΔNBM - vienādsānu, jo leņķi pie pamata ($\angle AMB$ un $\angle ANB$) šajā trijstūrī ir vienādi.



34. zīm.

Tādēļ NB=MB un ΔNBM augstums ir arī mediāna, t.i., MO=ON (O - taišņu MN un BK krustpunkts).

$\angle KMA=\angle KBA$ (kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku) =

$=\angle LBA=\angle LNA$. Tālāk

$OK = MO\cdot tg\angle KMA$; $OL = NO\cdot tg\angle LNA$.

Tā kā MO=ON un $\angle KMA=\angle LNA$, tad OK=OL.

Tā kā OM=ON un OK=OL, tad visas četras MKNL malas (MK, KN, NL, LM) ir vienādas ar $\sqrt{OM^2+OK^2}$, t.i., MKNL - rombs.

55. Atrod divas komandas, kas nav spēlējušas savā starpā. Apzīmē tās ar A_1 un A_2.

Ja ir kāda komanda, kas nav spēlējusi ne ar A_1, ne ar A_2, tad šī komanda, A_1 un A_2 ir 3 komandas, kas nav spēlējušas savā starpā.

Atliek aplūkot gadījumu, ja šādas komandas nav. Bez A_1 un A_2 vēl ir 20 komandas. A_1 un A_2 katra ir spēlējusi 10 spēles, abas kopā - 20. Tādēļ šajā gadījumā katra no pārējām komandām ir spēlējusi tieši ar vienu no A_1 un A_2.

Tās komandas, kas spēlējušas ar A_1, apzīmē ar $A_3,\ldots,A_{12}$, bet komandas, kas spēlējušas ar A_2, apzīmē ar $A_{13},\ldots,A_{22}$. Apskatām 2 gadījumus.

a) Starp $A_3,\ldots,A_{12}$ var atrast 2 komandas, kas nav spēlējušas savā starpā.

Tad šīs 2 komandas un A_2 ir 3 komandas, kas nav spēlējušas savā starpā.

b) Tādu 2 komandu nav. Tad katra no komandām $A_1,A_3,A_4,\ldots,A_{12}$ ir spēlējusi ar katru citu no šīm komandām. Šo komandu ir 11. Tādēļ katra no tām ir nospēlējusi ar citām komandām no $A_1,A_3,A_4,\ldots,A_{12}$ 10 spēles. Tas nozīmē, ka neviena no tām nav spēlējusi ne ar vienu no pārējām komandām ($A_2,A_{13},A_{14},\ldots,A_{22}$).

Aplūkojam komandas, kas spēlēja savā starpā pirmajā dienā. Katra no $A_1,A_3,A_4,\ldots,A_{12}$ nospēlēja 1 spēli ar kādu citu no šīm komandām. Taču tas nav iespējams, jo šo komandu ir nepāra skaits: 11. Tādēļ b) gadījums nav iespējams.

56. Ja cosx = cosy, tad $x = y+2\pi n$ vai $x = -y+2\pi n$. No sinx = - siny seko, ka pirmā iespēja neder, tātad $x = -y+2\pi n$.

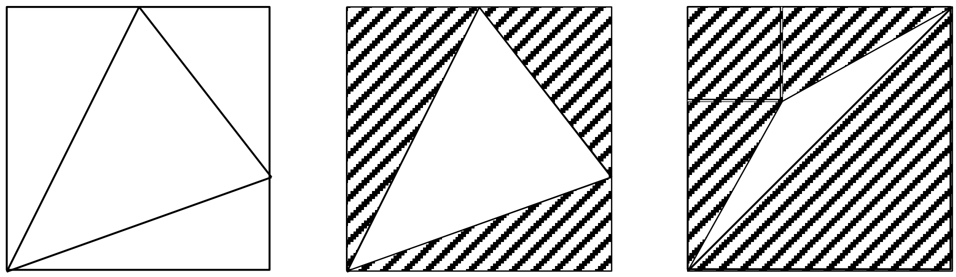
Tad

$\sin 1994x = \sin 1994(-y+2\pi n) = \sin(-1994y) = -\sin 1994y$;

sin 1994x + sin 1994y = 0.

57. a) <u>Apgalvojums.</u> Ja trijstūra virsotnes atrodas rūtiņu lapas virsotnēs, tad šī trijstūra laukums ir $\frac{n}{2}$, kur n - naturāls skaitlis.

<u>Pierādījums.</u>



35.zīm.

Katra šāda trijstūra laukumu var iegūt, no taisnstūra laukuma atņemot taisnleņķa trijstūru laukumus (sk. 35. zīm.). Taisnstūra laukums ir naturāls skaitlis, taisnleņķa trijstūra laukums - naturāls skaitlis, dalīts ar 2 ($\frac{ab}{2}$, kur a,b - katetes).

Katru piecstūri var pa diagonālēm sagriezt 3 trijstūros, katram no tiem laukums būs $\frac{n}{2}$, t.i., vismaz $\frac{1}{2}$. Tādēļ visa piecstūra laukums būs vismaz $\frac{3}{2}$.

b) Ja varētu pierādīt, ka piecstūra iekšpusē atrodas kāda rūtiņu virsotne, tad, savienojot to ar piecstūra virsotnēm, piecstūris tiktu sadalīts 5 trijstūros. Katram no tiem laukums ir vismaz $\frac{1}{2}$. Tādēļ piecstūra laukums ir vismaz $\frac{5}{2}$.

Pierādām, ka piecstūra iekšienē noteikti ir vismaz 1 rūtiņu virsotne.

<u>Lemma.</u> Ja ABCDE - izliekts piecstūris, tad var atrast 2 blakus virsotnes, kuru leņķu summa lielāka par 180^0.

<u>Pierādījums.</u> Ja tā nebūtu, tad izpildītos

$\angle A+\angle B\leq 180^0$, $\angle B+\angle C\leq 180^0$, $\angle C+\angle D\leq 180^0$,

$\angle D+\angle E\leq 180^0$, $\angle E+\angle A\leq 180^0$.

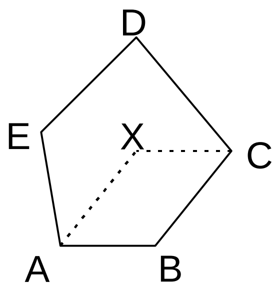
Summējot varētu iegūt, ka

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E\leq 450^0$.

Taču piecstūra leņķu summa ir $180^0(5-2) = 540^0$.

Tādēļ noteikti var atrast 2 blakus virsotnes, kurām leņķu summa ir lielāka par 180^0.

Pieņemam, ka tās ir virsotnes A un B. Var pieņemt, ka attālums no virsotnes E līdz AB nav mazāks nekā attālums no C līdz AB (citādi C un E var apmainīt vietām).



36.zīm.

Konstruējam paralelogramu, kura 3 virsotnes ir A, B un C. Tā ceturtā virsotne X noteikti atrodas piecstūra iekšienē.

Acīmredzami, ka, ja paralelograma trīs virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, tad arī ceturtā atradīsies rūtiņu virsotnē.

Tādējādi esam atraduši rūtiņu virsotni X, kas noteikti atrodas piecstūra iekšienē.

58. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \text{ un } a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Tā kā $a+b+c=abc,$ tad

$$abc \geq 3\sqrt[3]{abc},$$

$$(abc)^3 \geq 27abc,$$

$$abc \geq 3\sqrt{3} = \sqrt{3}^3.$$

Tādēļ vismaz viens no a,b,c ir lielāks vai vienāds ar $\sqrt{3}$. Bet $\sqrt{3} = 1{,}73\cdots > 1{,}7$.

59. Viegli pārbaudīt, ka der $n = m = 1$.

Pierādām, ka citu atrisinājumu nav.

Ja $2 \leq n \leq 8$, tad var pārbaudīt, ka $1!+\ldots+n!$ nav naturāla skaitļa kubs.

Ja $n \geq 9$, tad

$$1!+2!+\ldots+n! = (1!+2!+\ldots+8!) + (9!+\ldots+n!).$$

$9!+\ldots+n!$ dalās ar 27, jo katrs no saskaitāmajiem satur reizinātājus 3 un 9 un tādēļ dalās ar 27. Ievērosim, ka

$$1!+2!+\ldots+8! = 46233.$$

Šis skaitlis dalās ar 3, bet nedalās ar 27.

Tādēļ $(1!+\ldots+8!)+(9!+\ldots+n!)$ dalās ar 3, bet nedalās ar 27.

Ja $(1!+\ldots+8!)+(9!+\ldots+n!)$ būtu skaitļa m, kas dalās ar 3, kubs, tad tas dalītos ar $3^3=27$. Savukārt, ja tas būtu tāda skaitļa kubs, kas nedalās ar 3, tas nedalītos ar 3.

Tādēļ, ja $n \geq 9$, tad $1!+2!+\ldots+n!$ nav naturāla skaitļa kubs.

60. Atrodam divus cilvēkus, kas viens otru pazīst. Apzīmēsim viņus ar A un B.

A pazīst 1600 cilvēkus: B un vēl 1599 cilvēkus no pārējiem 1992. Līdzīgi, B pazīst 1599 no pārējiem 1992 cilvēkiem. Kopā A un B ir $2 \cdot 1599 = 3198$ pazīšanās ar citiem. Ievērojam, ka $3198 > 1992$. Tādēļ dažus no pārējiem 1992 cilvēkiem pazīst gan A, gan B. Apzīmēsim ar C kādu cilvēku, ko pazīst gan A, gan B.

A pazīst 1600 cilvēkus: B, C un vēl 1598 no pārējiem 1991 cilvēkiem. Līdzīgi, B un C pazīst 1598 no pārējiem 1991 cilvēkiem. Kopā A, B un C pazīst $3 \cdot 1598 = 4794$ cilvēkus. Tā kā

$4794>2\cdot1991$, dažus no pārējiem 1991 cilvēkiem pazīst visi trīs: gan A, gan B, gan C. Izvēlamies vienu cilvēku, ko pazīst gan A, gan B, gan C, apzīmēsim viņu ar D.

Līdzīgi pierāda, ka var izvēlēties cilvēku E, ko pazīst gan A, gan B, gan C, gan D, un cilvēku F, ko pazīst gan A, gan B, gan C, gan D, gan E. Tādā veidā tiek pierādīts, ka var atrast 6 cilvēkus (A,B,C,D,E un F), kas visi viens otru pazīst.

Rezerves variants 9.klasei (61.-65.)

61. Par a un b var izvēlēties jebkurus tādus skaitļus, ka $a=b$ vai $a=-b$. To var pierādīt šādi.

Ja $x^2+2bx+a^2=0$ eksistē atrisinājums, tad šī vienādojuma diskriminants lielāks vai vienāds ar 0, t.i.,

$$D=(2b)^2-4a^2=4b^2-4a^2\ge 0,\ b^2\ge a^2,\ |b|\ge|a|.$$

Līdzīgi no tā, ka $x^2+2ax+b^2=0$ eksistē atrisinājums, var izsecināt, ka $|a|\ge|b|$.

Tādējādi jābūt $|a|=|b|$ un $a=b$ vai $a=-b$. Ja tā ir, tad vienādojumi ir $x^2\pm2ax+a^2=0$ un tiem ir atrisinājumi $x=\mp a$.

62. Atrisinājumi ir $x=56$; $y=55$ un $x=20$; $y=17$.

Pierādām, ka citu atrisinājumu nav.

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=111.$$

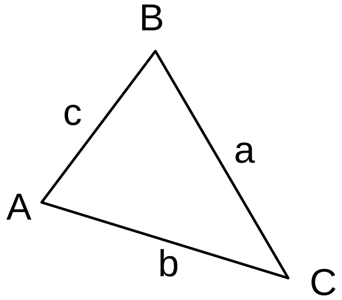
Sadalot skaitli 111 pirmreizinātājos, iegūst, ka $111=3\cdot37$.

Pastāv šādas iespējas:

1) $x-y=1$, $x+y=111$. Tad $x=56$, $y=55$;
2) $x-y=3$, $x+y=37$. Tad $x=20$, $y=17$;
3) $x-y$ ir 37 vai 111, $x+y$ ir 1 vai 3.

Tas nav iespējams, jo x un y ir naturāli skaitļi un tāpēc $x+y>x-y$.

63. Tā kā trijstūrī pretī garākajai malai atrodas lielākais leņķis, tad $\angle A>\angle B>\angle C$.



37.zīm.

Ja $\angle C$ būtu vienāds ar 60^0, tad $\angle A$ un $\angle B$ būtu lielāki par 60^0 un summa $\angle A+\angle B+\angle C$ - lielāka par 180^0. Taču trijstūra leņķu summa ir vienāda ar 180^0. Tāpēc $\angle C\ne60^0$.

Līdzīgi var pierādīt, ka $\angle A\ne60^0$. Tāpēc $\angle B=60^0$.

Pēc kosinusu teorēmas,

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\angle B=a^2+c^2-ac.$$

Apskatām trijstūri $A_1B_1C_1$, kuram

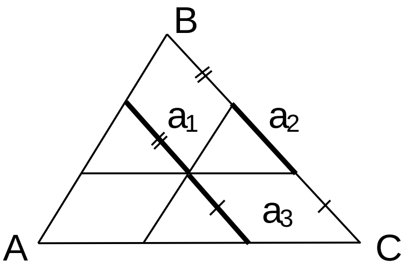
$$A_1B_1=a-c,\ B_1C_1=c \text{ un } \angle B_1=120^0.$$

Pēc kosinusu teorēmas

$$A_1C_1^2=A_1B_1^2+B_1C_1^2-2A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot\cos\angle B_1=$$
$$=(a-c)^2+c^2-2(a-c)c\cdot(-\frac{1}{2})=$$
$$=(a^2+c^2-2ac)+c^2+ac-c^2=a^2+c^2-ac.$$

Taču $b^2 = a^2+c^2-ac$. Tāpēc $A_1^2C_1^2 = b^2$ un $A_1C_1 = b$.
Līdz ar to $\Delta A_1B_1C_1$ ir trijstūris ar malām a-c, b, c un leņķi 120^0.

64. No tā, ka leņķi ar savstarpēji paralēlām un vienādi vērstām malām ir vienādi, seko, ka ΔABC un katram no trīs mazajiem trijstūriem leņķi ir pa pāriem vienādi; tāpēc visi šie trijstūri ir līdzīgi.



38. zīm.

Apzīmējot mazo trijstūru atbilstošās malas ar a_1; a_2; a_3 un BC=a, redzam, ka $a = a_1+a_2+a_3$ (paralelograma pretējās malas vienādas).

Līdzīgos trijstūros laukumi proporcionāli atbilstošo lineāro izmēru kvadrātiem ar vienu un to pašu proporcionalitātes koeficientu. Tāpēc, apzīmējot ABC laukumu ar S, iegūstam $S=k\cdot a^2$, $4=k\cdot a_1^2$, $9=k\cdot a_2^2$, $25=k\cdot a_3^2$. No šejienes $\sqrt{\frac{S}{k}} = a = a_1+a_2+a_3 = \sqrt{\frac{4}{k}} + \sqrt{\frac{9}{k}} + \sqrt{\frac{25}{k}}$.

Tādējādi $\sqrt{S} = \sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{25}$ un S=100.

65. Sadalīsim rūtiņās ierakstītos skaitļus saskaitāmajos (sk. 39. zīm.).

0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8
8+1	8+2						
16+1	16+2	...	...				
56+1	56+2	56+3	56+4	56+5	56+6	56+7	56+8

39. zīm.

Ņemam kādu šī kvadrāta horizontāli. Visās tās rūtiņās pirmais saskaitāmais ir viens un tas pats. 4 rūtiņās tam ir zīme “ - “ un 4 - zīme “+“. Tāpēc pirmo saskaitāmo summa jebkurā horizontālē ir 0. No tā izriet, ka pirmo saskaitāmo summa visā tabulā arī ir 0.

Līdzīgi pierāda, ka otro saskaitāmo summa visā tabulā arī ir 0, aplūkojot tos pa kolonnām. Tāpēc arī visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir 0.

Rezerves variants 11.klasei (65.-70.)

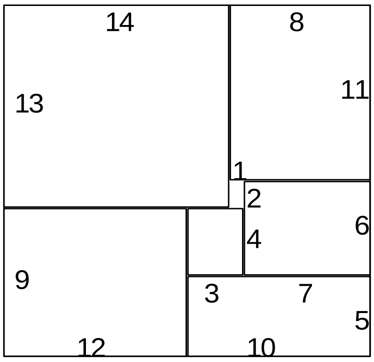
66. $\overline{abcdef} = \overline{abc}\cdot 1000+\overline{def} = 1001\cdot\overline{abc}-\overline{abc}+\overline{def} =$
$= 1001\cdot\overline{abc}-(\overline{abc}-\overline{def})$.

Tā kā *1001* dalās ar *7*, tad $1001\cdot\overline{abc}$ dalās ar *7*.

Tāpēc, ja $(\overline{abc}-\overline{def})$ dalās ar *7* , tad $\overline{abcdef}$ ir *2* skaitļu, kas dalās ar *7*, starpība un arī dalās ar *7*.

Līdzīgi, ja $\overline{abcdef}$ dalās ar *7*, tad $(\overline{abc}-\overline{def}) = 1001\cdot\overline{abc}-\overline{abcdef}$ ir *2* skaitļu, kas dalās ar *7*, starpība un arī dalās ar *7*.

67. Zīmējumā parādīts, kā var sagriezt kvadrātu 22×22. Pierādām, ka lielāku kvadrātu šādos 7 taisnstūros sagriezt nevar.



40.zīm.

Pieņemam, ka doti 7 taisnstūri. Apzīmējam pirmā taisnstūra malu garumus ar a_1 un b_1, otrā - a_2 un $b_2, \ldots$, septītā - a_7 un b_7.

Pēc uzdevuma nosacījuma, starp skaitļiem $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_7,b_7$ vismaz 1 reizi sastopams katrs no skaitļiem $1,2,3,\ldots,14$. Tā kā skaitļu $a_1,b_1,\ldots,a_7,b_7$ ir tieši 14, katrs no skaitļiem $1,2,3,\ldots,14$ starp tiem sastopams tieši 1 reizi.

Pirmā taisnstūra laukums ir a_1b_1, otrā - $a_2b_2,\ldots$, visu taisnstūru laukumu summa ir $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_7b_7$.

No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.

Tāpēc

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_7b_7 \leq \frac{a_1^2+b_1^2+\cdots+a_7^2+b_7^2}{2}.$$

Starp skaitļiem $a_1,b_1,\ldots,a_7,b_7$ katrs no skaitļiem $1,\ldots,14$ ir tieši 1 reizi. Tāpēc

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_7b_7 \leq \frac{1^2+2^2+\cdots+14^2}{2} = 507{,}5.$$

Bet $507{,}5<23^2$. Tāpēc jebkurā gadījumā 7 taisnstūru, kuru malu garumu kopa ir $\{1,2,\ldots,14\}$, laukumu summa ir mazāka par 23^2 - kvadrāta ar izmēriem 23×23 laukumu. Tas nozīmē, ka 23×23 (vai lielāku kvadrātu) šādos taisnstūros sagriezt nevar.

68. Lietojam matemātisko indukciju.

<u>Bāze</u>. Ja $n=1$, tad $\sqrt{a_{n+2}}=\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$ izpildās $(\sqrt{4}=\sqrt{1}+\sqrt{1})$.

<u>Induktīvā pāreja.</u> Pieņemam, ka $\sqrt{a_{n+2}}=\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}$ izpildās. Pierādām, ka $\sqrt{a_{n+3}}=\sqrt{a_{n+2}}+\sqrt{a_{n+1}}$.

No induktīvā pieņēmuma

$$\sqrt{a_n}=\sqrt{a_{n+2}}-\sqrt{a_{n+1}};$$

$$a_n=(\sqrt{a_{n+2}}-\sqrt{a_{n+1}})^2=a_{n+2}+a_{n+1}-2\sqrt{a_{n+1}a_{n+2}}.$$

No uzdevuma nosacījuma izriet, ka

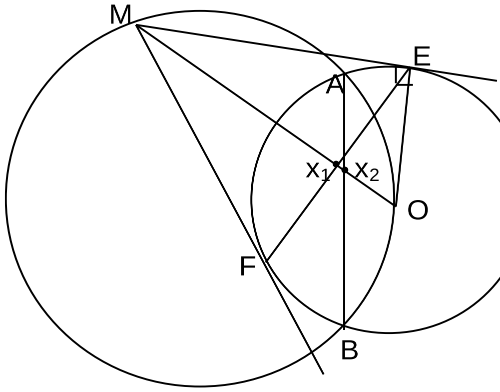
$$a_{n+3}=2a_{n+2}+2a_{n+1}-a_n=2a_{n+2}+2a_{n+1}-(a_{n+2}+a_{n+1}-2\sqrt{a_{n+1}a_{n+2}})=$$

$$=a_{n+2}+a_{n+1}+2\sqrt{a_{n+1}a_{n+2}} \text{ jeb}$$

$(\sqrt{a_{n+3}})^2=(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_{n+2}})^2$, no kurienes

$\sqrt{a_{n+3}} = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_{n+2}}$.

69. Apzīmējam ar X_1 nogriežņu EF un OM krustpunktu, bet ar X_2 - nogriežņu AB un OM krustpunktu. Pierādām, ka X_1 un X_2 sakrīt.



41. zīm.

1) Tā kā ME - pieskare, $\angle$ OEM=90^0. Tāpēc ΔOEM - tainsleņķa un cos$\angle$ MOE=$\dfrac{OE}{MO}$.

OM un EF ir perpendikulāri, tāpēc ΔEX_1O - tainsleņķa un OX_1=OE·cos$\angle$ MOE=$\dfrac{OE^2}{MO}$.

2) ΔAOM un ΔX_2OA ir līdzīgi, jo to atbilstošie leņķi ir vienādi: $\angle$ AOM un $\angle X_2OA$ sakrīt, bet $\angle OAX_2$=$\angle$ OMA (kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem: $\angle OAX_2$=$\angle$ OAB - uz loku OB, bet $\angle$ OMA - uz loku OA).

Līdzīgu trijstūru atbilstošās malas ir proporcionālas. Tāpēc $\dfrac{AO}{X_2O} = \dfrac{OM}{OA}$; $X_2O = \dfrac{OA^2}{OM}$.

OA=OE (kā otrās riņķa līnijas rādiusi). Tāpēc $OX_2=OX_1$.

Tas nozīmē, ka X_1 un X_2 sakrīt. Tādējādi pierādīts, ka EF un OM krustpunkts sakrīt ar AB un OM krustpunktu, t.i., ka AB, EF un OM krustojas vienā punktā.

70. Pierādām no pretējā. Pieņemam, ka 60 punkti ir savienoti savā starpā ar 30 hordām tā, ka visu hordu garumi ir dažādi.

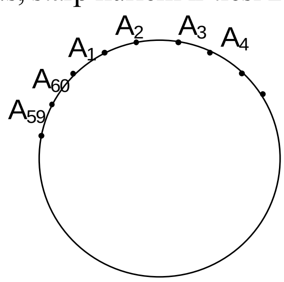
Apzīmējam punktus ar $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_{60}$. Ir 30 dažāda garuma hordas:

1) hordas, kas savieno 2 blakusesošus punktus (A_1A_2, A_2A_3, …);

2) hordas, kas savieno 2 punktus, starp kuriem ir tieši 1 cits (hordas A_1A_3, A_2A_4,…),

………………………………

30) hordas, kas savieno 2 punktus, starp kuriem ir tieši 29 citi (A_1A_{31}, A_2A_{32} utt.).



42. zīm.

Ja visu 30 hordu garumi ir dažādi, tad ir tieši 1 horda, kas savieno 2 blakusesošus punktus, tieši 1 horda, kas savieno 2 punktus, starp kuriem ir 1 cits, utt.

Nosaucam hordu par īpašu, ja tā savieno punktus A_i un A_j un viens no skaitļiem i,j ir pāra, bet otrs - nepāra.

Ja horda savieno 2 blakusesošus punktus, tad vienam tās galapunktam ir pāra numurs, otram - nepāra, t.i., tā ir īpaša. Līdzīgi horda, kas savieno 2 punktus, starp kuriem ir tieši 2 (4,6,…,28) punkti, ir īpaša. Savukārt horda, kas savieno 2 punktus, starp kuriem ir tieši 1 (3,5,…,29) punkti, nekad nav īpaša. Tas nozīmē, ka starp 30 hordām 15 ir īpašas un 15 tādas nav.

Ar ℓ apzīmējam tādu hordu, kuru abiem galapunktiem ir pāra numuri, skaitu. Punktu ar pāra numuriem, kas ir kādas hordas galapunkti, ir $2\ell+15$. (Ir ℓ hordas, kuru abiem galapunktiem ir pāra numuri. Katrai no šīm hordām ir 2 galapunkti, kopā - 2ℓ. Vēl ir 15 īpašās hordas, katrai no tām ir 1 galapunkts ar pāra numuru.)

Ir 30 punkti ar pāra numuriem: $A_2,\ldots,A_{60}$. Pēc uzdevuma nosacījuma, katram no tiem jābūt tieši 1 hordas galapunktam. Tāpēc jābūt $2\ell+15=30$. Aprēķinot ℓ, iegūst, ka $\ell=7{,}5$.

Taču ℓ nevar būt daļskaitlis. Iegūta pretruna.

Tas nozīmē, ka punktus savienot ar hordām atbilstoši pieņēmumam nav iespējams.

44. Valsts olimpiādes 4.kārta (71.-75.)

71. Pārveidojam vienādojumu:

$$3x^2+x=4y^2+y$$
$$3x^2-3y^2+x-y=y^2$$
$$(x-y)(3x+3y+1)=y^2.$$

Jebkurš skaitļa y dalītājs, kas nav vienāds ar 1, var dalīt tikai vienu no skaitļiem $x-y$ un $3x+3y+1$ (ja tas dalītu gan $x-y$, gan $3x+3y+1$, tad tas dalītu arī $3x+3y+1-$ $-3(x-y)=6y+1$ un $(6y+1)-6y=1$).

Apskatām skaitļa y sadalījumu pirmskaitļos

$$y=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$$
$$y^2=p_1^{2a_1}p_2^{2a_2}\cdots p_k^{2a_k}.$$

y^2 dalās ar $p_1^{2a_1}$. Tāpēc $(x-y)(3x+3y+1)$ dalās ar $p_1^{2a_1}$. Taču, tā kā p_1 ir y dalītājs, tad ar p_1 var dalīties tikai viens no skaitļiem $x-y$ un $3x+3y+1$. Tas nozīmē, ka viens no šiem skaitļiem dalās ar $p_1^{2a_1}$, bet otrs - nedalās ar p_1. Līdzīgi viens no šiem skaitļiem dalās ar $p_2^{2a_2}$, bet otrs - nedalās ar p_2, utt. Tādējādi

$$x-y=p_1^{2b_1}p_2^{2b_2}\cdots p_k^{2b_k}=\left(p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_k^{b_k}\right)^2,$$

kur $b_1=a_1$ vai $b_1=0$ (ja $x-y$ nedalās ar p_1), $b_2=a_2$ vai $b_2=0$, utt.

Tāpēc $x-y$ ir pilns kvadrāts. Līdzīgi pierāda, ka $3x+3y+1$ - kvadrāts.

Ja $3x^2+x=4y^2+y$ pārveido par $(x-y)(4x+4y+1)=x^2$, tad līdzīgi var pierādīt, ka $4x+4y+1$ ir kvadrāts.

72. Apskatām pārus (1,2), (1,3), (1,12), (3,4). Tiem izpildās

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 4}=1 \text{ un}$$

(1+1+1+3)+(2+3+12+4)=27.

Tātad ir 2^2 pāri ar summu 3^3.

Aizstājam pāri (a,b) ar diviem: $(a,a+b)$ un $(b,a+b)$. Tad

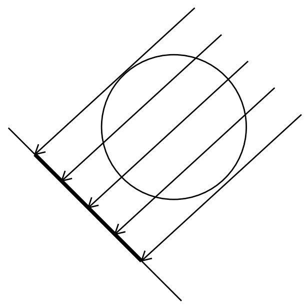
$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}=\frac{b+a}{ab(b+a)}=\frac{1}{ab},$$
$$a+(a+b)+b+(a+b)=3(a+b),$$

t.i. apgriezto lielumu summa nemainās, bet skaitļu summa palielinās 3 reizes.

Šādā veidā no 2^2 pāriem ar summu 3^3 var iegūt 2^3 pārus ar summu 3^4, pēc tam - 2^4 pārus ar summu 3^5, utt.

Var pierādīt (tas ir viegli), ka vienādi pāri var rasties tikai no vienādiem. Tādēļ visi iegūtie pāri būs dažādi.

73. a) Izvēlamies kādu taisni un ortogonāli projicējam uz tās nogriežņus. Lai nogriežņu sistēma būtu nosedzoša, nepieciešams, lai nogriežņu projekcijas nosegtu visu riņķa projekciju uz taisnes. Riņķa projekcijas garums vienāds ar diametra garumu, t.i., ar 2. Tādēļ projekciju kopējam garumam jābūt vismaz 2.



43.zīm.

Izvēlamies vienu taisni, nosaucam to par asi.

Ar $P(\alpha)$ apzīmējam nogriežņu projekciju uz taisnes, kas veido leņķi α ar asi, kopējo garumu. Jebkuram α jābūt $P(\alpha) \geq 2$. Tāpēc, ja nogriežņu sistēma ir nosedzoša, tad

$$\int_0^\pi P(\alpha)d\alpha \geq 2 \cdot \pi = 2\pi .$$

Ar ℓ_1 apzīmējam 1. nogriežņa garumu, ar ℓ_2 - 2. nogriežņa garumu, utt. Ar $P_1(\alpha)$ apzīmējam 1. nogriežņa projekcijas garumu uz taisnes, kas veido leņķi α ar asi. Apzīmējumus $P_2(\alpha), P_3(\alpha)$, utt. ieviešam līdzīgi. Tad

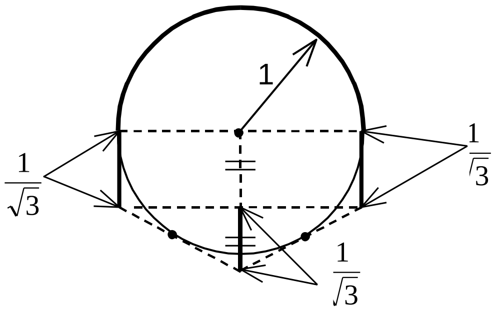
$$\int_0^\pi P(\alpha)d\alpha = \int_0^\pi P_1(\alpha)d\alpha + \int_0^\pi P_2(\alpha)d\alpha + \cdots$$. Bet

$$\int_0^\pi P_1(\alpha)d\alpha = \int_0^\pi |\ell_1 \cos\alpha| d\alpha = 2\ell_1$$ utt.

Tādēļ $\int_0^\pi P(\alpha)d\alpha = 2\ell_1 + 2\ell_2 + \cdots$.

Tā kā $\int_0^\pi P(\alpha)d\alpha \geq 2\pi$, , tad $\ell_1 + \ell_2 + \cdots \geq \pi > 3$.

b) Jā, eksistē (sk. 44. zīm.). Pusriņķa līniju aizstāj ar tai tuvu lauztu līniju. Tad lauztās līnijas garums ir $\pi + \varepsilon$, bet pārējo nogriežņu - $3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Kopējais nogriežņu sistēmas nogriežņu garums ir $\pi + \sqrt{3} + \varepsilon$. Ja lauzto līniju izvēlas pietiekami tuvu pusriņķim, tad ε - mazs, un $\pi + \sqrt{3} + \varepsilon < 5$.



44.zīm.

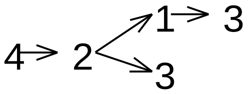
74. a) Aplūkosim gadījumu, kad $n<8$.

Rīkojas šādi.

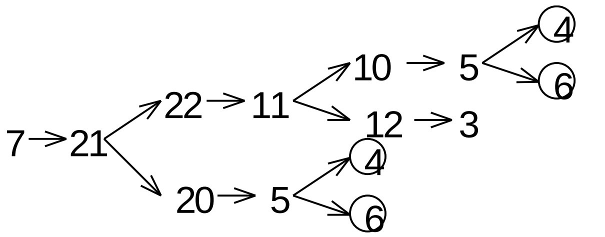
1) Ja n=1 1→3

2) Ja n=6 6→3

3) Ja n=4

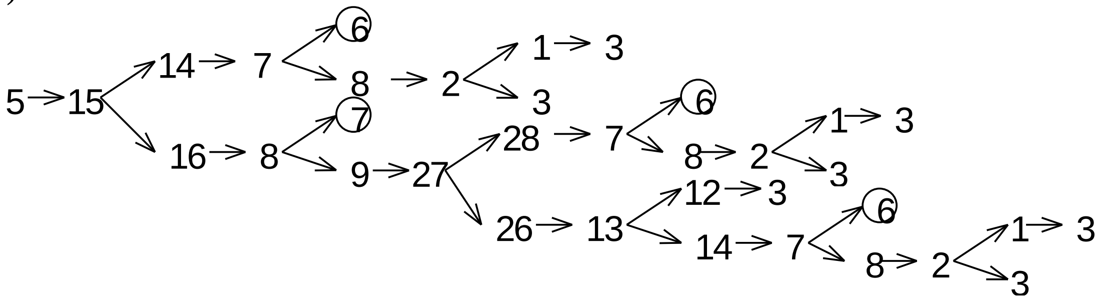


4) Ja n=7

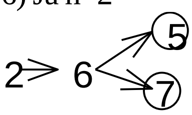


Ja pēc otrā spēlētāja gājiena tiek iegūts 4 vai 6, tālāk rīkojas tāpat kā gadījumos 2) un 3).

5) Ja n=5



6) Ja n=2



b) tagad pieņemsim, ka $n \geq 8$.

Tad, izdarot vairākus gājienus, skaitli n var samazināt.

1) n - pāra. Aizvieto n ar $\frac{n}{2}$. Pat, ja pēc tam otrais spēlētājs pieskaita 1, tad iegūst $\frac{n}{2}+1$, kas mazāks par n.

2) n - nepāra. Aizvieto n ar $3n$. Otrais spēlētājs tad aizvieto $3n$ ar $3n-1$ vai $3n+1$. Tā kā n - nepāra, tad $3n-1$ un $3n+1$ ir pāra skaitļi.

a) Skaitlis, ar ko otrais spēlētājs aizvieto $3n$, dalās ar 4. Tad pirmais spēlētājs aizvieto šo skaitli ar tā dalījumu ar 4. Pēc otrā spēlētāja gājiena iegūtais skaitlis nebūs lielāks par

$$\frac{3n}{4}+1<n.$$

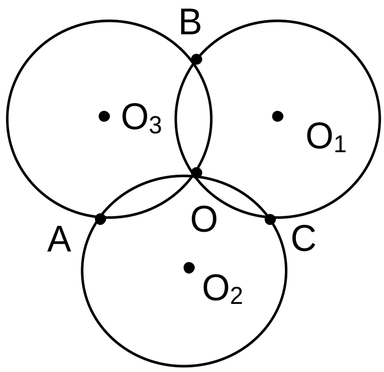
b) Skaitlis, ar ko otrais spēlētājs aizvieto *3n*, nedalās ar *4*, bet ir pāra. Apzīmējam šo skaitli ar *m*. Pirmajam spēlētājam jāaizvieto *m* ar $\frac{m}{2}$. Pēc tam otrais spēlētājs aizvieto $\frac{m}{2}$ ar $\frac{m}{2}+1$ vai $\frac{m}{2}-1$.

Tā kā *m* nedalās ar *4,* tad $\frac{m}{2}$ - nepāra un gan $\frac{m}{2}+1$, gan $\frac{m}{2}-1$ ir pārskaitļi. Tādēļ pirmais spēlētājs var $\frac{m}{2}+1$ vai $\frac{m}{2}-1$ aizvietot ar $\frac{\frac{m}{2}+1}{2}$ vai $\frac{\frac{m}{2}-1}{2}$. Pēc otrā spēlētāja gājiena tiek iegūts skaitlis, kas nav lielāks par

$$\frac{\frac{m}{2}+1}{2}+1\le\frac{\frac{3n+1}{2}+1}{2}+1 = \frac{3n}{4}+\frac{7}{4}<n.$$

Tādējādi, ja $n\ge 8$, tad pirmais spēlētājs var panākt, ka šis skaitlis samazinās. Viņš tā rīkojas līdz brīdim, kamēr uz tāfeles pēc otrā spēlētāja gājiena parādās skaitlis, kas mazāks par 8. Tālāk viņam jārīkojas tā, kā aprakstīts punktā a).

75. 1. lemma. Ja riņķa līniju centrus apzīmē ar O_1, O_2, O_3, tad $\Delta O_1O_2O_3=\Delta ABC$.



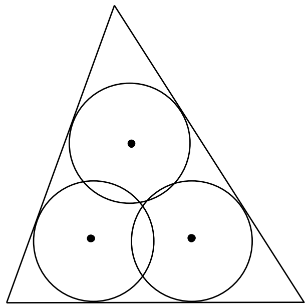
45. zīm.

Pierādījums. Tā kā AO_3OO_2 - rombs, tad $AO_2=O_3O$ un $AO_2\|O_3O$. Tā kā BO_1OO_3 - rombs, tad $BO_1=O_3O$ un $BO_1\|O_3O$. Tādēļ $AO_2=BO_1$ un $AO_2\|BO_1$. Tas nozīmē, ka ABO_1O_2 - paralelograms. Paralelograma pretējās malas ir vienādas. Tādēļ $AB=O_1O_2$.

Līdzīgi var pierādīt, ka $AC=O_3O_1$ un $BC=O_3O_2$. No tā izriet trijstūru $O_1O_2O_3$ un ABC vienādība.

2. lemma. Ja *r* ir kaut kāda trijstūra ievilktās riņķa līnijas rādiuss, bet *R* - apvilktās riņķa līnijas rādiuss, tad $R\ge 2r$.

Pierādījums. Apskatām trijstūri, ko veido malu viduspunkti. Tas ir līdzīgs sākotnējam trijstūrim ar līdzības koeficientu $\frac{1}{2}$. Tādēļ tā apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir $\frac{R}{2}$. Ievilktā riņķa līnija ir mazākā no tām riņķa līnijām, kam ar katru malu ir kopējs punkts. Tādēļ $\frac{R}{2}\ge r$. Lemma pierādīta.



46.zīm.

Var ievērot, ka trijstūris Δ ir līdzīgs $\Delta O_1O_2O_3$. (To atbilstošās malas ir paralēlas.) Tādēļ šo trijstūru laukumu attiecību var iegūt kā to ievilkto riņķu rādiusu kvadrātu attiecību.

Apzīmējam $O_1O_2O_3$ ievilktās un apvilktās riņķa līnijas rādiusus ar r un R. Tā kā $OO_1=OO_2=OO_3$, tad O - apvilktās riņķa līnijas centrs un tās rādiuss vienāds ar triju doto riņķa līniju rādiusiem. Trijstūra Δ ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir $r+R$. Tāpēc laukumu attiecība ir

$$\left(\frac{R+r}{r}\right)^2 \geq \left(\frac{3r}{r}\right)^2 = 9.$$

21. atklātā olimpiāde (76. – 95.)

76. Nē. Ja a=b=1 un c=0, tad vienādojumam $x^2+x=0$ ir divas dažādas saknes, bet $x+1=0$ - tikai viena.

77. Uzdevuma risinājums balstīsies uz teorēmu: ja četrstūris ABCD ir apvilkts ap riņķa līniju, tad AB+CD=AD+BC.

Apzīmējam četrstūra diagonāļu krustpunktu ar O. Pēc Pitagora teorēmas

$AB^2=AO^2+OB^2$ $\qquad$ $CD^2=CO^2+OD^2$

$BC^2=BO^2+OC^2$ $\qquad$ $AD^2=AO^2+OD^2$

Tādēļ

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2 \qquad (1)$$

Kāpinot vienādību AB+CD=AD+BC kvadrātā, iegūst

$(AB+CD)^2=(AD+BC)^2$

$AB^2+CD^2+2AB\cdot CD=AD^2+BC^2+2AD\cdot BC$, no kurienes saskaņā ar (1) seko

$2AB\cdot CD= 2AD\cdot BC$ un $AB\cdot CD=AD\cdot BC$.

78. Kopā ir $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ iespējami pilsētu pāri. Tādēļ, ja valstī ir 37 aviolīnijas, tad ir tikai $45-37=8$ pilsētu, kuras nesavieno aviolīnijas, pāri.

Apskatām 2 pilsētas. Apzīmējam tās ar P_1 un P_2. Pierādām, ka no P_1 uz P_2 var aizlidot ar ne vairāk kā vienu pārsēšanos.

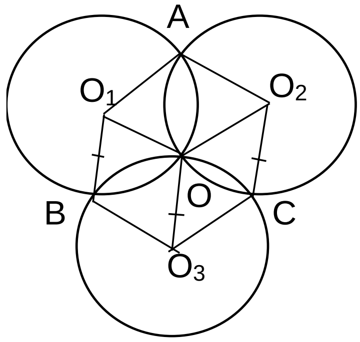
Apzīmējam pārējās pilsētas ar $P_3,\ldots,P_{10}$. Ir 9 iespējamie maršruti no pilsētas P_1 uz pilsētu P_2 ar ne vairāk kā vienu pārsēšanos:

1) lidot no P_1 uz P_2 tieši,
2) lidot no P_1 uz P_3 un tad no P_3 uz P_2,
3) lidot no P_1 uz P_4 un tad no P_4 uz P_2,
……………………………
9) lidot no P_1 uz P_{10} un tad no P_{10} uz P_2.

Ja no P_1 uz P_2 nevar aizlidot ar ne vairāk kā 1 pārsēšanos, tad katrā no šiem maršrutiem ir divas pilsētas, starp kurām nav aviolīnijas. Tas nozīmē, ka kopā ir vismaz 9 pilsētu, starp kurām nav aviolīniju, pāri. Taču mēs jau pierādījām, ka tādu pilsētu pāru ir tikai 8.

Tādēļ no P_1 uz P_2 var aizlidot ar ne vairāk kā 1 pārsēšanos.

79. Pierādām, ka $AO \perp BC$. Tas nozīmē, ka O atrodas uz augstuma, ka vilkts no virsotnes A pret malu BC. Līdzīgi var pierādīt, ka $BO \perp AC$, $CO \perp AB$ un tādēļ O atrodas arī uz pārējiem diviem ΔABC augstumiem, t.i., ir šī trijstūra augstumu krustpunkts.



47.zīm.

Apzīmējam ar O_1,O_2,O_3 riņķa līniju centrus (sk. 47. zīm.).

Tā kā riņķa līniju rādiusi ir vienādi, tad četrstūri AO_1OO_2, BO_1OO_3 un CO_2OO_3 ir rombi.

Romba diagonāles ir perpendikulāras. Tādēļ $AO \perp O_1O_2$ (1). Jebkurš rombs ir arī paralelograms. Tādēļ BO_1OO_3 - paralelograms. Romba malas BO_1 un O_3O ir paralēlas un vienādas. Līdzīgi paralēlas un vienādas ir arī romba CO_2OO_3 malas CO_2 un OO_3.

Tādēļ $BO_1=O_3O=CO_2$ un $BO_1 \| O_3O \| CO_2$. Tas nozīmē, ka četrstūris BO_1O_2C ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir paralēlas un vienādas.

Tā kā BO_1O_2C - paralelograms, $O_1O_2 \| BC$ (2). No (1) un (2) seko $AO \perp BC$.

80. a) Jā, eksistē. Piemēram, der skaitļi

$$996, 2, \underbrace{1, \cdots, 1}_{496 reizes}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{1494 reizes}$$

b) Nē, neeksistē. Ievērosim, ka 1994 var uzrakstīt kā 1994 veselu skaitļu reizinājumu tikai sekojošos veidos:

$1994=(\pm1994)\cdot(\pm1)\cdot(\pm1)\cdot\ldots\cdot(\pm1)$ vai

$1994=(\pm997)\cdot(\pm2)\cdot(\pm1)\cdot\ldots\cdot(\pm1)$, jo 997 - pirmskaitlis.

Abos gadījumos tieši 1 reizinātājs ir pāra skaitlis, bet pārējie 1993 reizinātāji ir nepāra skaitļi. Saskaitot 1993 nepāra skaitļus, kā summu iegūst nepāra skaitli. Tam pieskaitot pāra skaitli, arī kā summu iegūst nepāra skaitli. Tādēļ, ja 1994 veselu skaitļu reizinājums ir 1994, tad to summa ir nepāra skaitlis. Taču 0 ir pāra skaitlis.

81. Varam ievērot, ka

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

Nevienādības kreisā puse ir lielāka arī par 1,01. To var pierādīt šādi.

Pieņem, ka lielākais no skaitļiem *a,b,c* ir *a*. (Ja tas ir *b* vai *c*, tad tālākie spriedumi ir līdzīgi.) Tad

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{a+b+c}+\left(\frac{a}{b+c}-\frac{a}{a+b+c}\right)=\frac{a}{a+b+c}+\frac{a^2}{(b+c)(a+b+c)}.$$

Tā kā a - lielākais no skaitļiem a,b,c, tad $b\le a$, $c\le a$ un $(b+c)(a+b+c)\le 6a^2$. Tādēļ

$$\frac{a}{b+c}\ge\frac{a}{a+b+c}+\frac{a^2}{6a^2}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{1}{6}\text{ un}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b+c}+\frac{1}{6}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1\frac{1}{6}>1{,}01.$$

Ar sarežģītākiem spriedumiem var parādīt, ka nevienādības kreisā puse nav mazāka par $1\frac{1}{2}$.

82. Skaitlis p_1 ir vismazākais pirmskaitlis, t.i., $p_1=2$. Tāpēc $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n=2p_2\cdot\ldots\cdot p_n$, t.i., $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$ - pāra skaitlis un $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n+1$ - nepāra.

Pieņemam, ka kaut kādam x un n

$p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n+1 = x^2$.

Tad, tā kā $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n+1$ - nepāra, tad x arī ir nepāra skaitlis. Apskatām $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n = x^2-1 = (x-1)(x+1)$.

Taču šī vienādība nevar izpildīties, jo $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$ nedalās ar 4, bet $(x-1)(x+1)$ dalās ar 4.

83. Šī daļa izsaka iracionālu skaitli.

To var pierādīt no pretējā. Pieņemsim, ka šī daļa izsaka racionālu skaitli. Tādā gadījumā tā ir bezgalīga periodiska decimāldaļa. Tas nozīmē, ka tā ir vienāda ar $0,a_1\ldots a_m(b_1\ldots b_n)$, kur $a_1,\ldots,a_m$ - neperiodiskās daļas cipari, $b_1,\ldots,b_n$ - perioda cipari.

Nevienam naturālam skaitlim kvadrāta pirmais cipars nav 0. Tāpēc šī daļa satur bezgalīgi daudz ciparu, kas nav 0. Tas nozīmē, ka vismaz viens no cipariem $b_1,\ldots,b_n$ nav 0. (Ja $b_1=0,\ldots,b_n=0$, tad daļa satur tikai galīgu skaitu ciparu, kas nav 0.)

Apskatām skaitļa 10^{m+n} kvadrātu - skaitli 10^{2m+2n}. Šī skaitļa pieraksts sākas ar vienu ciparu 1, kam seko 2n+2m cipari 0. Tā kā virknē tiek izrakstīti visu naturālo skaitļu kvadrāti, kaut kad tiks uzrakstīts arī skaitlis 10^{2n+2m}, turklāt tas izvietosies jau periodiskajā virknes daļā.

Pieņem, ka šī skaitļa pirmais cipars ir i-tais perioda cipars (b_i). Tādā gadījumā nākošie 2n+2m cipari būs 0. Tas nozīmē, ka arī n pēc kārtas ņemti cipari $b_{i+1},b_{i+2},\ldots,b_n,b_1,b_2,\ldots,b_i$ būs 0, t.i., $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$.

Iegūta pretruna ar to, ka kāds no cipariem $b_1,\ldots,b_n$ nav 0. Tādēļ pieņēmums ir nepareizs un daļa neizsaka racionālu skaitli.

84. Ja četrstūris ir ievilkts riņķa līnijā, tad tā pretējo leņķu summa ir 180^0. Tā kā četrstūri MAOB, NAOC un KBOC ir ievilkti riņķa līnijās, izpildās vienādības

$\angle OAM+\angle OBM = 180^0$

$\angle OAN+\angle OCN = 180^0$

$\angle OCK+\angle OBK = 180^0$.

No šīm vienādībām seko, ka

$\angle OCN = 180^0-\angle OAN = 180^0-(180^0-\angle OAM) = \angle OAM$.

Līdzīgi, $\angle OCK = \angle OBM$.

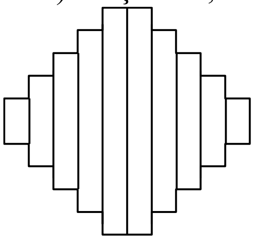
Tas nozīmē, ka

$\angle OCN+\angle OCK=\angle OAM+\angle OBM = 180^0$, tāpēc

$\angle NCK = \angle OCN+\angle OCK = 180^0$.

Tādējādi $\angle NCK$ ir izstiepts leņķis, t.i., N,C,K atrodas uz vienas taisnes.

85. Figūru var sagriezt 10 daļās (sk. 48. zīm.). Pieņemam, ka figūru var sagriezt 9 daļās.

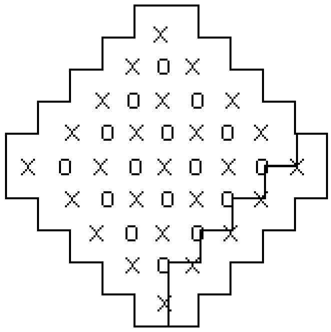


48. zīm.

Sagriešanu 9 daļās var veikt, griežot 8 reizes. (Pirmajā reizē figūra tiek sagriezta 2 daļās. Tad, otro reizi griežot, viena no daļām tiek sagriezta 2 daļās, izveidojas 3 daļas, utt. Pēc 8 griezieniem izveidojas 9 daļas.)

Izkrāsojam rūtiņu virsotnes, kas atrodas figūras iekšienē, 2 krāsās: zilā un sarkanā. (sk. 49.zīm.; zilās virsotnes apzīmētas ar x, sarkanās - ar o.)

Ar k apzīmējam to zilo virsotņu, caur kurām iet vismaz viena griezuma līnija, skaitu, bet ar ℓ apzīmējam tādu sarkano virsotņu skaitu.



49. zīm.

Apgalvojums. $k \le \ell + 8$.

Pierādījums. Apskatām pirmo griezuma līniju (t.i. līniju, pa kuru figūra tiek sagriezta, griežot pirmoreiz). Šī līnija sākas ar kādu virsotni uz figūras robežas (šī virsotne nav nokrāsota), tad seko zilā virsotne (x), tad sarkanā (o), zilā, …, zilā (x), virsotne uz figūras robežas. Tāpēc zilo virsotņu uz šīs griezuma līnijas ir tikai par 1 vairāk nekā sarkano. Līdzīgi var pierādīt, ka uz otrās, trešās, … griezuma līnijas zilo virsotņu būs augstākais par 1 vairāk nekā sarkano.

Tā kā kopā tiek izdarīti 8 griezumi, tad zilo virsotņu, caur kurām tiks izdarīts kāds griezums, skaits pārsniegs tādu sarkano virsotņu skaitu ne vairāk kā par 8. Mūsu apgalvojums pierādīts.

Taču zilo virsotņu pavisam ir 25, bet sarkano 16. Tā kā 25-16=9>8, tad ir vismaz viena zilā virsotne, caur kuru neiet neviena griezuma līnija.

Apskatām šo virsotni un 4 rūtiņas, kas atrodas tai blakus. Tā kā caur virsotni neiet neviena griezuma līnija, visas 4 rūtiņas atrodas vienā daļā, t.i., šī daļa satur kvadrātu 2×2.

Esam pierādījuši, ka, ja figūra tiek sagriezta 9 daļās, tad viena no tām satur kvadrātu 2×2.

86. Varam ievērot, ka

$(x^2-2x-1)^2-2(x^2-2x-1)-x-1 =$
$= (x^4-4x^3+2x^2+4x+1)-(2x^2-4x-2)-x-1 =$
$= x^4-4x^3+7x+2 =$
$= (x^2-3x-1)(x^2-x-2).$

Tādēļ, ja $x^2-3x-1 = 0$, tad $(x^2-2x-1)^2-2(x^2-2x-1)-x-1 = 0$.

Apskatīsim arī otru risinājumu.

Ja a ir vienādojuma $x^2-3x-1 = 0$ sakne, tad

$a^2-3a-1 = 0$ jeb $a^2-2a-1 = a$. Tāpēc

$(a^2-2a-1)^2-2(a^2-2a-1)-a-1 = a^2-2a-a-1 = a^2-3a-1 = 0$, t.i., a ir arī otrā vienādojuma sakne.

87. Vienādojumam ir šādi atrisinājumi

1) x=0, y - jebkurš vesels skaitlis;

2) y=0, x - jebkurš vesels skaitlis;

3) (x=11, y=4); (x=-5, y=2); (x=7, y=5); (x=-1, y=1); (x=5, y=7); (x=1, y=-1); (x=4, y=11); (x=2, y=-5).

Pierādām, ka citu atrisinājumu nav.

Ja x vai y ir 0, tad (x,y) ir vienādojuma atrisinājums neatkarīgi no y, jo $(x^2+0)(0+x) = x^3 = (x+0)^3$. Līdzīgi, ja y ir 0, tad (x,y) ir vienādojuma atrisinājums pie jebkuras x vērtības.

Tādēļ pietiek apskatīt gadījumu, kad $x\neq0$, $y\neq0$. Tad

$(x^2+y)(y^2+x) = (x+y)^3$

$x^3+y^3+x^2y^2+xy = x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$

$x^2y^2+xy = 3x^2y+3xy^2$

$xy(xy+1) = 3xy(x+y)$

$xy+1 = 3(x+y)$

$xy-3x-3y+1 = 0$

$xy-3x-3y+9 = 8$

$(x-3)(y-3) = 8.$

Tā kā x un y jābūt veseliem skaitļiem, tad (x-3) un (y-3) arī jābūt veseliem. Bet 8 var uzrakstīt kā divu veselu skaitļu reizinājumu tikai šādos veidos: $8\cdot1$, $(-8)\cdot(-1)$, $4\cdot2$, $(-4)\cdot(-2)$, $2\cdot4$, $(-2)\cdot(-4)$, $1\cdot8$, $(-1)\cdot(-8)$. Katram no šiem veidiem atbilst viens vienādojuma atrisinājums. (Piemēram, ja x-3=8, y-3=1, tad x=11, y=4.)

88. Apskatām šādus gadījumus.

a) $a=b=c$. Tad $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a} = 2+2+2 = 6<9.$

b) Starp skaitļiem a,b,c vismaz 2 ir dažādi. Pieņemam, ka a ir lielākais no skaitļiem a,b,c, bet c - mazākais. Tādā gadījumā $a\geq b\geq c$.

1^0. Ja $a=c$, tad $a=b=c$. Tādēļ $a>c$.

2^0. $\frac{b+c}{a}<\frac{a+a}{a}=2$. Tā kā $\frac{b+c}{a}$ - naturāls skaitlis, tad $\frac{b+c}{a}=1$ un $a=b+c$.

3^0. Ja $b<\frac{a}{2}$, tad $c\leq b<\frac{a}{2}$ un $b+c<a$. Tādēļ $b\geq\frac{a}{2}$.

4^0. No $b\geq\frac{a}{2}$ seko, ka $c=a-b\leq\frac{a}{2}$ un $\frac{a+c}{b}\leq\frac{a+\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}=3.$

5^0. No $b\leq a$ un $c>0$ seko, ka $\frac{a+c}{b}>\frac{a}{a}=1.$

Esam pierādījuši, ka

$1<\frac{a+c}{b}\leq3.$

Tā kā $\frac{a+c}{b}$ ir naturāls, tad $\frac{a+c}{b}=2$ vai $\frac{a+c}{b}=3$.

Apskatām katru no šiem gadījumiem atsevišķi.

1) $\frac{a+c}{b}=2$.

Tad $a+c=2b$. No $a=b+c$ iegūst, ka

$(b+c)+c = 2b$ un $2c=b$.

Tāpēc šajā gadījumā $b=2c$ un $a=b+c=3c$. Tad

$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a} = \frac{5c}{c}+\frac{4c}{2c}+\frac{3c}{3c} = 5+2+1 = 8<9.$$

2) $\frac{a+c}{b}=3$. Tad $a+c=3b$, $(b+c)+c=3b$, $2c=2b$ un $c=b$. Tādēļ $b=c$ un $a=b+c=2c$. Tad

$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a} = \frac{3c}{c}+\frac{3c}{c}+\frac{2c}{2c} = 3+3+1 = 7<9.$$

89. Sākumā aizpildām kvadrātu 1994×1994 prasītajā veidā.

Pirmajā rindā ierakstām skaitļus -997, -996,…, -1, 1,…,997; otrajā rindā - skaitļus $-997\cdot998$, $-996\cdot998$,…, -998, 998,…, $997\cdot998$; trešajā - skaitļus $-997\cdot998^2$, $-996\cdot998^2$,…, -998^2, 998^2,…, $997\cdot998^2$, utt.; 1993.-ajā rindā - skaitļus $-997\cdot998^{1992}$, $-996\cdot998^{1992}$,…, -998^{1992}, 998^{1992},…, $997\cdot998^{1992}$; 1994.-ajā rindā - skaitļus $997\cdot m$. $996\cdot m$,…,m, -m,…,-997m, kur $m=1+998+998^2+\ldots+998^{1992}$.

Viegli ievērot, ka katrā vertikālē un horizontālē skaitļu summa ir 0. Visi pirmajā rindā esošie skaitļi pēc absolūtās vērtības nepārsniedz 997, bet visi otrajā rindā esošie skaitļi ir vismaz 998. Tādēļ neviens skaitlis nevar būt reizē kādā pirmās rindas rūtiņā un kādā otrās rindas rūtiņā. Līdzīgi var pierādīt, ka neviens skaitlis nevar būt divās rūtiņās, kas atrodas dažādās rindās. No konstrukcijas redzams, ka viens un tas pats skaitlis nevar būt divās rūtiņās vienā rindā. Tādēļ visi kvadrātā ierakstītie skaitļi ir dažādi.

Tagad ierakstām skaitļus kubā 1994×1994×1994. Sadala kubu 1994 horizontālos slāņos 1×1994×1994. Ar k apzīmējam skaitli, kas lielāks par visiem skaitļiem kvadrāta 1994×1994 rūtiņās.

Vienā slānī rakstām skaitļus tāpat kā kvadrātā 1994×1994, otrajā - katrā rūtiņā rakstām skaitli, kas ierakstīts atbilstošajā kvadrāta rūtiņā, pareizinātu ar k, trešajā - skaitli kvadrāta rūtiņā, pareizinātu ar k^2, utt. 1993,-ajā - skaitli kvadrāta rūtiņā, pareizinātu ar ar k^{1992}, 1994.-ajā - skaitli kvadrāta rūtiņā, pareizinātu ar $-(1+\ldots+k^{1992})$.

Pierādījums, ka katrā "stabiņā" summa ir 0 un visi skaitļi ir dažādi, līdzīgs pierādījumam priekš kvadrāta 1994×1994.

90. Atbilde: 100. Tie var būt, piemēram, visu malu viduspunkti (tie visi atrodas uz 100-stūrī ievilktās riņķa līnijas). Pierādām, ka vairāk atzīmētu punktu uz riņķa līnijas atrasties nevar.

Ar O apzīmēsim 100-stūra apvilktās riņķa līnijas centru, bet ar R - tās rādiusu. 100-stūra virsotnes apzīmējam ar $A_1,\ldots,A_{100}$. Sadalām atzīmētos punktus 50 grupās:

1) Malu viduspunkti;

2) Diagonāļu A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5,…, $A_{98}A_{100}$, $A_{99}A_1$, $A_{100}A_2$ viduspunkti;

…………………………

49) Diagonāļu A_1A_{50}, A_2A_{51},…, $A_{100}A_{49}$ viduspunkti;

50) Diagonāļu A_1A_{51}, A_2A_{52},…,$A_{50}A_{100}$ viduspunkti (tie sakrīt ar O).

Katrā grupā (izņemot pēdējo) ietilpst 100 nogriežņu viduspunkti, pie tam visi katras grupas punkti atrodas vienādā attālumā no O.

Apskatām kaut kādu riņķa līniju un pierādām, ka uz tās atrodas ne vairāk par 100 atzīmētajiem punktiem. Apskatām 2 gadījumus:

a)Riņķa līnijas centrs ir O.

Tā kā dažādu grupu punkti atrodas dažādā attālumā no O, tad uz šīs riņķa līnijas var atrasties tikai vienas grupas punkti. To var būt ne vairāk kā 100.

b) Centrs nav O.

Katras grupas punkti atrodas vienādā attālumā no O, t.i., uz riņķa līnijas ar centru O. Divām riņķa līnijām, kuru centri nesakrīt, var būt ne vairāk kā 2 kopējie punkti. Tādēļ uz riņķa līnijas var būt ne vairāk kā 2 punkti no katras grupas, kopā $\leq 2\cdot 50 = 100$ punkti.

91. Ievērojam, ka $tgx + ctgx = tgx + \frac{1}{tgx}$ un jebkuram y $\left|y + \frac{1}{y}\right| \geq 2$. Tādēļ $|tgx + ctgx| \geq 2$.

Savukārt $|\sin x| \leq 1$ un $|\cos x| \leq 1$, pie tam, ja $|\sin x| = 1$, tad $|\cos x| \neq 1$. Tādēļ $|\sin x + \cos x| \leq |\sin x| + |\cos x| < 2$.

Tas nozīmē, ka šim vienādojumam atrisinājumu nav.

92. Apzīmējam šos 10 skaitļus ar n, n+1,…,n+9.

Starp tiem ir 5 pāra skaitļi un 5 nepāra skaitļi. Nepāra ir vai nu pirmais, trešais, ..., devītais vai arī otrais, ceturtais, ..., desmitais skaitlis. Apskata šos piecus nepāra skaitļus.

Starp tiem ir ne vairāk kā 2 skaitļi, kas dalās ar 3, ne vairāk kā 1 skaitlis, kas dalās ar 5, un ne vairāk kā 1 skaitlis, kas dalās ar 7. Tādēļ viens no šiem 5 nepāra skaitļiem nedalās ne ar 3, ne ar 5, ne ar 7. Apzīmējam to ar m.

Šis skaitlis ir savstarpējs pirmskaitlis ar katru no pārējiem skaitļiem n, n+1,…,n+9. (Ja tam un kādam citam no šiem skaitļiem būtu kopīgs dalītājs, kas lielāks par 1, tad šis dalītājs dalītu arī šo 2 skaitļu starpību. Šī starpība nepārsniedz 9. Tāpēc kopīgais dalītājs ir viens no pirmskaitļiem 2,3,5,7 vai šo pirmskaitļu reizinājums. Taču skaitlis m nedalās ne ar 2, ne ar 3, ne ar 5, ne ar 7.

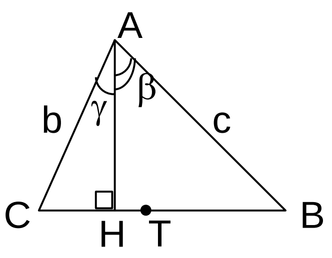
93. Ar h_a, t_a un m_a apzīmēsim no virsotnes A vilkto augstuma, bisektrises un mediānas garumus. Līdzīgi ieviešam apzīmējumus h_b, t_b, m_b un h_c, t_c, m_c.

Uzdevuma risinājums balstīsies uz vairākām lemmām, kas izraisa arī patstāvīgu interesi.

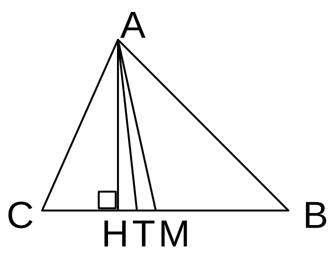
<u>1. lemma.</u> Ja $b \neq c$, tad $h_a < t_a < m_a$.

<u>Pierādījums.</u> Varam pieņemt, ka b<c. Apzīmēsim no A vilkto augstuma, bisektrises un mediānas pamatus atbilstoši ar H, T, M.

Tā kā garākajai slīpnei atbilst garākā projekcija, tad CH<BH. Tāpēc M pieder nogrieznim BH, nevis CH.



50. zīm.



51. zīm.

Tā kā $tg\gamma < tg\beta$, tad $\gamma < \beta$, tāpēc bisektrise no virsotnes A iet $\angle BAH$, nevis $\angle CAH$ iekšpusē; tāpēc arī T pieder nogrieznim BH, nevis CH. Pēc bisektrises īpašības $\frac{CT}{TB} = \frac{b}{c} < 1$, tāpēc CT<BT;

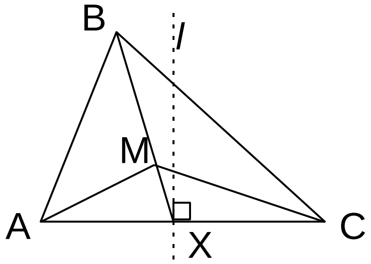
tātad T atrodas pa kreisi no punkta M (sk. 50. zīm.). Iegūstam 51. zīm. redzamo ainu. Skaidrs, ka $h_a<t_a$; tā kā HM>HT un garākajai projekcijai atbilst garākā slīpne, tad $m_a>t_a$. Lemma pierādīta.

2. lemma. Ja $h_a=t_a$, $h_a=m_a$ vai $t_a=m_a$, tad b=c, un otrādi.

Lemmas pierādījums izriet no 1. lemmas pierādījuma.

3. lemma. No divām trijstūra mediānām garāka ir tā, kas vilkta pret īsāku malu.

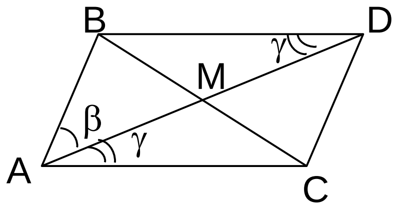
Pierādījums. Pieņemsim, ka AB<BC, X - malas AC viduspunkts. Novelkam AC vidusperpendikulu ℓ. Tad B atrodas pa kreisi no ℓ (sk. 52. zīm.). Tāpēc arī mediānu krustpunkts M ir pa kreisi no ℓ; tātad AM<MC. Bet AM un MC ir $\frac{2}{3}$ no mediānām attiecīgi pret BC un AB. No šejienes seko lemma.



52.zīm.

4. lemma. Ja trijstūra divas malas nav vienādas, tad mediāna no to kopējās virsotnes veido mazāku leņķi ar garāko malu.

Pierādījums. Pieņemsim, ka ΔABC pastāv sakarība AB<AC. Papildināsim to līdz paralelogramam ABDC (sk. 53. zīm.).

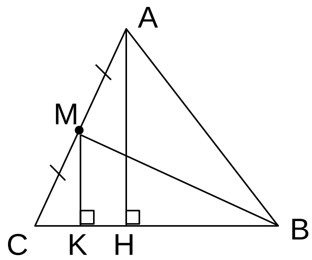


53.zīm.

Tad BD=AC, tāpēc AB<BD. Trijstūrī ABD pret garāko malu atrodas lielākais leņķis, tāpēc $\angle$BAD>$\angle$BDA. Bet $\angle$BDA=$\angle$DAC, tāpēc $\angle$BAD>$\angle$DAC. Lemma pierādīta.

Tagad pārejam pie uzdevuma risinājuma.

No malas AC viduspunkta M novelkam perpendikulu MK pret malu BC. Tad MK=$\frac{1}{2}$AH. Tā kā AH=BM, tad MK=$\frac{1}{2}$BM; tāpēc $\angle$MBC=30^0.



54. zīm.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem $h_a=m_b=t_c$. No 1. un 2. lemmas izriet, ka $h_a\le m_a$ un $t_c\le m_c$; tāpēc $m_b\le m_a$ un $m_b\le m_c$. No 3.lemmas seko, ka b≥a un b≥c. Tātad mala b ir garākā (vai viena no garākajām); tāpēc $\angle$**B≥60^0**.

Tā kā $h_a=t_c \geq h_c$, tad $h_a \geq h_c$. Tā kā $a \cdot h_a=2L=c \cdot h_c$, tad no šejienes seko $a \leq c$. No 4.lemmas seko $\angle MBA \leq MBC=30^0$, tātad $\angle \mathbf{B \leq 60^0}$. Salīdzinot ar iepriekš iegūto, $\angle B=60^0$; bet, tā kā $\angle B$ ir viens no lielākajiem ΔABC leņķiem (vai pats lielākais), tad visi šī trijstūra leņķi ir 60^0, ko arī vajadzēja pierādīt.

94. Atbilde. n=1949.

Vispirms parādām, ka eksistē virkne, no kuras nevar izsvītrot 1948 skaitļus tā, lai apmierinātu uzdevuma prasības.

Ievērojam, ka $44 \cdot 45=1980<1994$. Sadalām skaitļus no 1 līdz 1994 sekojošās 45 grupās:

No 1 līdz 45	A_1
No 45+1 līdz $2 \cdot 45$	A_2
No $2 \cdot 45+1$ līdz $3 \cdot 45$	A_3
.	
.	
.	
No $43 \cdot 45+1$ līdz $44 \cdot 45$	A_{44}
No $44 \cdot 45+1$ līdz 1994	A_{45}

Izveidojam sekojošu virkni:

Grupa A_{45} Grupa A_{44} … Grupa A_2 Grupa A_1 (katrā grupā skaitļi izvietoti augošā kārtībā).

Ja izsvītro 1948 skaitļus, paliek neizsvītroti 46 skaitļi. Tā kā grupu ir tikai 45, atradīsies divi neizsvītroti skaitļi no vienas grupas; tie virknē izvietoti augošā secībā. Savukārt katrā grupā ir ne vairāk kā 45 skaitļi, tāpēc atradīsies divi skaitļi no dažādām grupām; tie izvietoti dilstošā secībā.

Tātad atlikušie skaitļi neveido ne augošu, ne dilstošu virkni.

Tagad parādīsim, ka **jebkuram** sākotnējam sakārtojumam 1949 skaitļus noteikti var izsvītrot tā, lai atlikušie veidotu vai nu augošu, vai dilstošu virkni.

Dalām skaitļus vairākās grupās:

1) Tie skaitļi, pirms kuriem nav neviena lielāka skaitļa.
2) Tie skaitļi, pirms kuriem nav neviena lielāka skaitļa, izņemot 1. grupas skaitļus.
3) Tie skaitļi, pirms kuriem nav neviena lielāka skaitļa, izņemot 1. un 2. grupas skaitļus.

…........................

Ja izveidojas ne vairāk kā 44 grupas un katrā no tām ir ne vairāk par 44 skaitļiem, tad kopā ir ne vairāk kā $44^2=1936$ skaitļi. Taču 1936<1944. Tādēļ vai nu veidojas vismaz 45 grupas, vai arī vienā grupā ir vismaz 45 skaitļi. Apskatām šos divus gadījumus atsevišķi:

a) Veidojas vismaz 45 grupas.

Ņem kādu skaitli no 45. grupas. Apzīmē to ar a_{45}. Ja pirms a_{45} neatrastos neviens lielāks skaitlis no 44. grupas, tad a_{45} nonāktu 44. grupā. Tāpēc pirms a_{45} virknē ir vismaz viens lielāks skaitlis no 44. grupas. Ņem vienu tādu skaitli, apzīmē to ar a_{44}. Līdzīgi izvēlas a_{43} - skaitli, kas lielāks par a_{44}, atrodas pirms a_{44} un pieder 43. grupai, a_{42}, …, a_1.

Skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{45}$ veido dilstošu virkni. Pārējos 1994-45=1949 skaitļus var izsvītrot.

b) Kādā grupā ir vismaz 45 skaitļi.

Apskatām kaut kādus divus skaitļus no šīs grupas. Ja pirmais no tiem ir lielāks par otro, tad iegūstam pretrunu ar skaitļu dalījumu grupās. (Grupā nonāk tādi skaitļi, ka pirms tiem nav lielāku skaitļu, izņemot iepriekšējo grupu skaitļus. Taču pirms otrā skaitļa ir pirmais skaitlis, kas ir lielāks par otro. Tādēļ otrajam skaitlim nevajadzētu nonākt šajā grupā.) Tādēļ no jebkuriem diviem šīs grupas skaitļiem mazākais ir tas, kas virknē ir pirmais, t.i., šīs grupas skaitļi veido augošu virkni. Pārējos skaitļus var izsvītrot. Izsvītrojamo skaitļu ir ne vairāk kā 1994-45=1949.

95. Atbilde. $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ punkti, ja n - nepāra, un $\frac{n(n+2)}{4}$ punkti, ja n - pāra skaitlis.

Vispirms parādīsim, ka ar šādu punktu daudzumu pietiek.

Novelkam plaknē n taisnes tā, lai nekādas 2 no tām nebūtu paralēlas un nekādas 3 nekrustotos vienā punktā. Apzīmējam i-tās un j-tās taisnes krustpunktu ar $A_{i,j}$. Ar B_i apzīmējam kaut kādu punktu, kas atrodas uz i-tās taisnes un nesakrīt ne ar vienu no krustpunktiem. Ja n - pāra, tad atzīmējam

$$A_{1,2};\ldots;A_{1,n};A_{2,3};\ldots;A_{2,n-1};A_{3,4};\ldots;A_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1};B_1;B_2;\cdots;B_{\frac{n}{2}}.$$

Ja n - nepāra, tad atzīmējam

$$A_{1,2};\cdots;A_{1,n};A_{2,3};\cdots;A_{2,n-1};A_{3.4};\cdots;A_{3,n-2};\cdots;A_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}};A_{\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2}};B_1;\cdots;B_{\frac{n+1}{2}}.$$

Uz 1. taisnes tad būs atzīmēti n punkti, uz 2. - $(n-1)$, utt.

Tagad pierādīsim, ka mazāku punktu skaitu atzīmēt nevar. Nosaucam par 1. taisni tādu taisni, uz kuras atzīmēti n punkti, par 2. taisni - taisni, uz kuras atzīmēti $n-1$ punkti, utt.

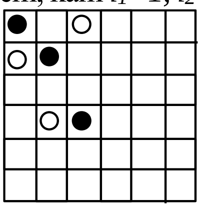
Uz 1. taisnes ir atzīmēti n punkti. Uz 2. taisnes ir atzīmēti $n-1$ punkti, taču viens no tiem var būt 1. un 2. taisnes krustpunkts, kas atrodas reizē arī uz 1. taisnes. Tas nozīmē, ka uz 2. taisnes atzīmēti vismaz $n-2$ punkti, kas neatrodas uz 1. taisnes. Līdzīgi, uz 3. taisnes atzīmēti vismaz $n-4$ punkti, kas neatrodas ne uz 1., ne uz 2. taisnes, utt.

Tāpēc kopā atzīmēto punktu skaits ir vismaz

$$n+(n-2)+(n-4)+\cdots = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2, & \text{ja n = 2k + 1, k} \in Z \\ \frac{n(n+2)}{4}, & \text{ja n = 2k, k} \in Z \end{cases}.$$

Atlases sacensības 35. starptautiskajai olimpiādei (96. – 101.)

96. Nosauksim m melnos un m baltos kauliņus par ciklu, ja tie izvietoti tā, ka melnie kauliņi atrodas i_1. kolonnas j_1. rūtiņā, i_2. kolonnas j_2. rūtiņā utt., i_m. kolonnas j_m. rūtiņā, bet baltie - i_1. kolonnas j_2. rūtiņā, i_2. kolonnas j_3. rūtiņā, utt., i_m. kolonnas j_1. rūtiņā. (sk., piemēram, 55. zīmējumu, tur attēlots cikls ar 3 baltiem un 3 melniem kauliņiem, kam $i_1=1, i_2=2, i_3=3, j_1=1, j_2=2, j_3=4$).



55. zīm.

Viegli saprast, ka visus kauliņus var sadalīt vienā vai vairākos ciklos.

Parādām, kā var, mainot vietām rindas un kolonnas, panākt, lai visi viena cikla melnie kauliņi nokļūtu tur, kur sākumā bija šī cikla baltie kauliņi un visi šī cikla baltie - tur, kur sākumā bija šī cikla melnie.

Apskatām ciklu ar k baltajiem un k melnajiem kauliņiem, kur melnie kauliņi atrodas rūtiņās (i_1,j_1), (i_2,j_2), …, (i_m,j_m), bet baltie - rūtiņās (i_1,j_2), (i_2,j_3), … , (i_{k-1},j_k), (i_k,j_1). (Apzīmējums (i,j) apzīmē i.-tās kolonnas j.-to rūtiņu.)

Veicam šādas darbības:

1) Apmainām vietām i_1. un i_m. kolonnas, tad i_2. un i_{m-1}., utt., $i_{\left\lceil\frac{m-1}{2}\right\rceil}$. un $i_{m+1-\left\lceil\frac{m-1}{2}\right\rceil}$. kolonnas.

2) Apmaināmām vietām i_2. un i_m. rindas, tad i_3. un i_{m-1}.,utt., $i_{\left[\frac{m}{2}\right]}$.un $i_{m+2-\left[\frac{m}{2}\right]}$. rindas.

Kas notiks ar melno kauliņu, kas atrodas rūtiņā (i_k,j_k)? Mainot vietām k.- un ($m+1-k$). kolonnas, tas nonāks rūtiņā (i_{m+1-k},j_k), bet, mainot k. un $m+2-k$. rindas - rūtiņā (i_{m+1-k},j_{m+2-k}), t.i., rūtiņā, kur sākumā bija baltais kauliņš.

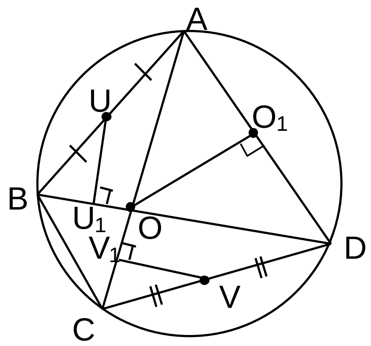
Līdzīgi var pierādīt, ka baltie kauliņi nonāks rūtiņās, kur sākumā bija melnie.

Ja ir tikai viens cikls, tad šādā veidā var pārkārtot visus kauliņus. Ja cikli ir vairāki, tad sākumā pārkārto pirmā cikla kauliņus, tad otrā cikla kauliņus, utt.

97. Ieviešam dažus apzīmējumus.

Ar U_1 apzīmējam punktu, kurā perpendikuls, kas vilkts no U pret BD, krusto BD. Ar O_1 un V_1 apzīmējam punktus, kuros perpendikuli no O un V pret AD un AC krusto šīs taisnes (sk. 56. zīm.).

Ar X_1 apzīmējam UU_1 un OO_1 krustpunktu, bet ar X_2 - VV_1 un OO_1 krustpunktu. Lai pierādītu, ka trīs taisnes krustojas vienā punktā, jāpierāda, ka $X_1=X_2$.



56.zīm.

$\angle X_1U_1D = \angle X_1O_1D = 90^0$. Tas nozīmē, ka punkti X_1, U_1, O_1, D atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Labi zināms, ka jebkuriem 4 punktiem A_1, A_2, A_3, A_4 kas atrodas uz vienas riņķa līnijas, izpildās vienādība

$A_1K{\cdot}A_2K = A_3K{\cdot}A_4K$,

kur K - nogriežņu A_1A_2 un A_3A_4 krustpunkts.

Tādēļ $U_1O{\cdot}OD = X_1O{\cdot}OO_1$.

Līdzīgi var pierādīt, ka $V_1O{\cdot}OA = X_2O{\cdot}OO_1$.

Ja būtu pierādīts, ka izpildās

$U_1O{\cdot}OD = V_1O{\cdot}OA$, (∗)

tad no tā sekotu, ka $X_1O{\cdot}OO_1 = X_2O{\cdot}OO_1$ un $X_1O = X_2O$. Punkti X_1 un X_2 abi atrodas uz taisnes OO_1 vienā pusē no O. Tādēļ $OX_1 = OX_2$ nozīmētu, ka X_1 un X_2 sakrīt.

Tādējādi, lai pierādītu, ka taisnes krustojas vienā punktā, pietiek pierādīt vienādību (∗).

Tā kā A, B, C, D atrodas uz vienas riņķa līnijas, izpildās

$$AO{\cdot}OC = BO{\cdot}OD \text{ un } BO = CO{\cdot}\frac{AO}{OD}. \qquad (1)$$

Ievērojam, ka $\angle ABD = \angle ACD$ (kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku), $BU_1 = BU{\cdot}\cos\angle ABD$ un $CV_1 = CV{\cdot}\cos\angle ACD$.

No tā seko, ka

$$BU_1 = CV_1{\cdot}\frac{BU}{CV} = CV_1{\cdot}\frac{AB}{CD}. \qquad (2)$$

ΔAOB un ΔDOC ir līdzīgi, jo to atbilstošie leņķi ir vienādi. No trijstūru līdzības seko, ka atbilstošās malas ir proporcionālas:

$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OD}$, tāpēc no (2) seko $BU_1 = CV_1 \cdot \frac{AO}{OD}$. (3)

Acīmredzot $OU_1 = BO\text{-}BU_1$ un $OV_1 = CO\text{-}CV_1$.

Tādēļ no (1) un (2) izriet, ka

$OU_1 = OV_1 \cdot \frac{AO}{OD}$ jeb $OU_1 \cdot OD = OV_1 \cdot AO$. Uzdevums atrisināts.

98. Meklējam atrisinājumu formā

$$\begin{cases} x = p - q \\ y = p \\ z = p + q \end{cases} \qquad (*)$$

Viens šāda veida atrisinājums ir (1234, 3456, 5678). Tad p=3456, q=2222.

Ievietojot dotajā vienādojumā vienādības (*), iegūst, ka

$$a_{11}(p-q)^2+a_{22}p^2+a_{33}(p+q)^2+a_{12}(p-q)p+$$
$$+a_{13}(p-q)(p+q)+a_{23}p(p+q) = 0$$

jeb pēc pārveidojumiem

$$(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{12}+a_{13}+a_{23})p^2+(-2a_{11}+2a_{33}-a_{12}+a_{23})pq+$$
$$+(a_{11}+a_{33}-a_{13})q^2 = 0.$$

Apzīmējam

$$\begin{cases} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{12} + a_{13} + a_{23} \\ B = -2a_{11} + 2a_{33} - a_{12} + a_{23} \\ C = a_{11} + a_{33} - a_{13} \end{cases}.$$

Tad izpildās vienādība

$$Ap^2+Bpq+Cq^2 = 0 \qquad (**)$$

jeb

$$A\left(\frac{p}{q}\right)^2 + B\left(\frac{p}{q}\right) + C = 0.$$

Apzīmējam

$$x = \frac{p}{q}.$$

Tad $Ax^2+Bx+C = 0$ ir kvadrātvienādojums, kura viens atrisinājums ir $\frac{p}{q} = \frac{3456}{2222} = \frac{1728}{1111}$.

Pieņem, ka $A \neq 0$. Tad kvadrātvienādojuma atrisinājumus var iegūt pēc formulas

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}.$$

Viena no vienādojuma saknēm ir racionāls skaitlis $\frac{1728}{1111}$. Tādēļ $\sqrt{D}$ - vesels skaitlis. (Citādi abas saknes būtu iracionālas.)

Tāpēc daļā $\frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$ gan skaitītājā, gan saucējā ir veseli skaitļi.

$\frac{1728}{1111}$ ir nesaīsināma daļa. Tādēļ

$$-B \pm \sqrt{D} = 1728k$$
$$2A = 1111k$$

pie kaut kāda vesela skaitļa k.

Tā kā $|a_{ij}|<100$, tad

$|A|=|a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{12}+a_{13}+a_{23}|\leq$

$\leq|a_{11}|+|a_{22}|+|a_{33}|+|a_{12}|+|a_{13}|+|a_{23}|<600,$

$|2A|<2\cdot600=1200.$

Tas nozīmē, ka $k=1$ vai $k=-1$ (citādi $|2A|>1200$). Taču tādā gadījumā $A=\dfrac{1111k}{2}=\pm555\dfrac{1}{2}$.

Tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, ka visi a_{ij} ir veseli skaitļi.

Tādēļ pieņēmums, ka $A\neq0$, ir nepareizs. Tādējādi $A=0$. Līdzīgi var pierādīt, ka $B=0$ un $C=0$.

Tāpēc vienādība (**) izpildās pie jebkurām p un q vērtībām. Tā kā (**) iegūta no sākotnējā vienādojuma, tas nozīmē, ka jebkurš naturālu skaitļu trijnieks formā (*) ir sākotnējā vienādojuma atrisinājums.

Tā atrisinājums ir, piemēram, (3;4;5), kas apmierina uzdevuma prasības.

99. Maksimālā iespējamā vērtība ir $n-1$. Tā tiek sasniegta, ja, piemēram, $x_1=0$ un $x_2=x_3=\ldots=x_n=1$. Pierādām, ka

$$\frac{x_1}{x_2\cdots x_n+1}+\cdots+\frac{x_n}{x_1x_2\cdots x_{n-1}+1}\leq n-1 \qquad (*)$$

pie jebkādiem tādiem x_i, ka $0\leq x_i\leq1$. Pierādījumā lietojam matemātisko indukciju.

<u>Indukcijas bāze</u>. $n=2$.

Pieņemam, ka $x_1\leq x_2$ (ja $x_1>x_2$, tad spriedumi ir līdzīgi). Tad

$$\frac{x_1}{x_2+1}+\frac{x_2}{x_1+1}\leq\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{x_1+1}\leq\frac{x_1+1}{x_1+1}=1=2-1.$$

<u>Induktīvā pāreja</u>. Pieņemam, ka nevienādība (*) pierādīta n skaitļiem $x_1,\ldots,x_n$. Pierādām to $n+1$ skaitļiem.

Tā kā nevienādība (*) izpildās jebkuriem n skaitļiem no $[0;1]$, tad, pielietojot to skaitļiem $x_1\cdot x_2$, $x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1}$, iegūstam

$$\frac{x_1x_2}{x_3\cdots x_{n+1}+1}+\frac{x_3}{x_1x_2x_4\cdots x_{n+1}+1}+\cdots+\frac{x_{n+1}}{x_1\cdots x_n+1}\leq n-1. \qquad (1)$$

<u>Lemma</u>. Izpildās nevienādība

$$\frac{x_1}{x_2\cdots x_{n+1}+1}+\frac{x_2}{x_1x_3\cdots x_{n+1}+1}\leq\frac{x_1x_2}{x_3\cdots x_{n+1}+1}+1 \qquad (2)$$

<u>Pierādījums</u>.

Apzīmējam $S=x_3\ldots x_{n+1}$. Tad (2) pārvēršas par

$$\frac{x_1}{x_2S+1}+\frac{x_2}{x_1S+1}\leq\frac{x_1x_2}{S+1}+1. \qquad (3)$$

To var pierādīt, pierādot divas nākošās nevienādības (4) un (5) un tās saskaitot:

$$x_1+x_2\leq x_1x_2+1 \qquad (4)$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2S+1}+\frac{x_2}{x_1S+1}\right)-\left(x_1+x_2\right)\leq\frac{x_1x_2}{S+1}-x_1x_2. \qquad (5)$$

(4) pārveidojas par acīmredzamu nevienādību

$$\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)\geq0.$$

Lai pierādītu (5), to pārveido šādi:

$$\left(\frac{x_1}{x_2S+1}-x_1\right)+\left(\frac{x_2}{x_1S+1}-x_2\right)\leq\frac{x_1x_2}{S+1}-x_1x_2$$

$$-\frac{x_1x_2S}{x_2S+1}-\frac{x_1x_2S}{x_1S+1}\le-\frac{x_1x_2S}{S+1}$$

$$\frac{x_1x_2S}{x_2S+1}+\frac{x_1x_2S}{x_1S+1}\ge\frac{x_1x_2S}{S+1}. \qquad (6)$$

Tā kā $0\le x_1\le 1$, tad $x_1S+1\le S+1$ un

$$\frac{x_1x_2S}{x_1S+1}\ge\frac{x_1x_2S}{S+1}.$$

No tā seko nevienādība (6).

Saskaitot nevienādības (4) un (5), iegūst nevienādību (3). Lemma pierādīta.

Saskaitot nevienādības (1) un (2), iegūst prasīto nevienādību (∗) priekš $n+1$ skaitļiem.

100. a) jā, var. Apzīmējam dotos punktus pēc kārtas pulksteņa rādītāja kustības virzienā ar A_1, A_2, …, A_{48}. Uzdevuma prasības būs apmierinātas, piemēram, ja savienošana notiks šādi:

A_1 ar A_{24};

A_2 ar A_{48}, A_3 ar A_{47}, A_4 ar A_{46}, … , A_{13} ar A_{37};

A_{14} ar A_{35}, A_{15} ar A_{34}, A_{16} ar A_{33}, A_{17} ar A_{32};

A_{23} ar A_{36};

A_{30} ar A_{31};

A_{18} ar A_{29}, A_{19} ar A_{28}, … , A_{22} ar A_{25}.

Pārliecinieties par to patstāvīgi.

b) Nē, nevar. To pierāda šādi:

Punktus apzīmē ar A_1, A_2, …, A_{3988} (līdzīgi kā a) daļā). Hordu nosauc par īpašu, ja tās galapunkti ir A_i un A_j, i ir pārskaitlis, bet j - nepārskaitlis.

Apgalvojums. Ja punkti A_1, …, A_{3988} savienoti ar 1994 hordām tā, lai visi 3988 punkti būtu izmantoti kā hordu galapunkti, tad īpašu hordu ir pāra skaits.

Pierādījums. Ar k apzīmējam īpašo hordu skaitu, bet ar ℓ - tādu hordu skaitu, kurām abi galapunkti ir ar pāra numuriem. Punktu ar pāra numuriem, kas ir kādas hordas galapunkti, ir $k+2\ell$.

Kopā punktu ar pāra numuriem ir 1994. Tādēļ $k+2\ell=1994$. Tāpēc $k=1994-2\ell$ un k - pārskaitlis. Tagad pierādām no pretējā, ka 1994 dažāda garuma hordas nevar izveidoties. Pieņemam, ka 1994 dažāda garuma hordas tomēr ir.

Ir 1994 iespējamie hordu garumi.

1) Hordas, kas savieno 2 blakus punktus (A_1A_2, A_2A_3, …).

2) Hordas, kas savieno 2 punktus, starp kuriem ir tieši 1 cits (A_1A_3,A_2A_4,…)

………………

1994) Hordas, kas savieno 2 punktus, starp kuriem ir tieši 1993 citi (A_1A_{1995}, A_2A_{1996}, …).

Ja visām hordām garumi ir dažādi, tad no katras minētās hordu grupas ir novilkta tieši 1 horda.

Taču 997 grupās (1), 3), 5),…, 1993)) visas hordas ir īpašas, un pārējās 997 (2), 4), …, 1994)) neviena horda nav īpaša. Tādēļ ir novilktas 997 īpašas hordas. Tā ir pretruna ar pieņemto apgalvojumu, ka īpašu hordu ir pāra skaits.

Tādējādi 1994 hordas vajadzīgajā veidā novilkt nevar.

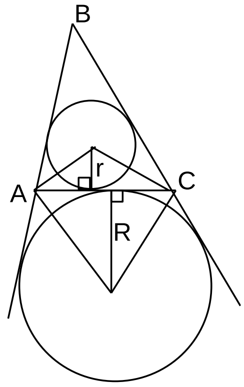
101. Lemma. Pastāv sakarība

$$\frac{r}{R}=tg\frac{A}{2}\ tg\frac{C}{2}$$ (sk. 57. zīm.).

<u>Pierādījums</u> Viegli iegūt, ka

$$AC = r\left(ctg\frac{A}{2} + ctg\frac{C}{2}\right) \text{ un } AC = R\left(ctg\frac{180^0 - A}{2} + ctg\frac{180^0 - C}{2}\right).$$

Pielīdzinot abas AC izteiksmes, iegūstam vajadzīgo.



57. zīm.

Pielietojot šo lemmu visiem $n+1$ trijstūriem, "iekšējo" leņķu tangensi reizinājumā saīsinās, un

$$\frac{r_1}{R_1}\cdot\frac{r_2}{R_2}\cdot\ldots\cdot\frac{r_{n+1}}{R_{n+1}} = \frac{r}{R},$$

kur r un R - ΔABC ievilktās un apvilktās riņķa līnijas rādiusi.

Starptautiskā komandu olimpiāde "Baltijas ceļš – 93" (102.-121.)

102. Pieņemam, ka $a_1>a_3$. Tad divi dotie skaitļi ir

$x = 10^2a_1+10a_2+a_3$ un $y = 10^2a_3+10a_2+a_1$.

Skaitlis x^2 ir piecciparu. Tas nozīmē, ka $x^2\leq 99999$ un $x\leq\sqrt{99999}$. Tādēļ x pirmais cipars $a_1\leq 3$. Skaidrs, ka $a_3\geq 1$ un $a_1>a_3$. Tādēļ $a_1\geq 2$. Tas nozīmē, ka vai nu $a_1=2$ un $a_3=1$ vai $a_1=3$ un $a_3\in\{1;2\}$.

Apskatot šos gadījumus, var atrast visus atrisinājumus:

301(103), 311(113), 201(102), 211(112), 221(122).

103. Jā, piemēram, a=10, b=6. Ja skaitli, kas beidzas ar ciparu 6, pareizina ar citu skaitli, kas arī beidzas ar ciparu 6, tad reizinājuma pēdējais cipars arī būs 6. Tādēļ jebkuram naturālam k skaitlis 6^k beidzas ar ciparu 6, t.i., $6^k=10n+6$ pie kaut kāda n.

104. 3 skaitļi (piemēram, 33, 34, 35).

Pierādām no pretējā, ka nav 4 pēc kārtas esošu interesantu skaitļu. Pieņemam, ka tādi skaitļi ir, un apzīmējam tos ar n, n+1, n+2, n+3.

Viens no šiem 4 skaitļiem dalās ar 4. Apskatām 2 gadījumus:

a) Šis skaitlis ir 4. Tā nevar būt, jo ne 3, ne 5 nav interesanti.

b) Šis skaitlis nav 4. Tad tas ir $4\cdot k$, kur $k>1$. Tas nozīmē, ka šis skaitlis ir $2\cdot 2\cdot k$, t.i., tas ir vairāk kā 2 pirmskaitļu reizinājums un nav interesants. Pretruna.

Esam pierādījuši, ka 4 pēc kārtas esošu interesantu naturālu skaitļu nav.

105. Lai izteiksmes

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}+n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}} \qquad (*)$$

vērtība būtu definēta, nepieciešams, lai visas zemsaknes izteiksmes būtu nenegatīvas, no kurienes iegūstam

$0 \le n \le \frac{625}{4}$.

Kāpinām izteiksmi (∗) kvadrātā. Iegūstam

$$\left(\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}\right)^2 =$$

$$=\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}+\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}+2\sqrt{\left(\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}\right)\left(\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}\right)} =$$

$$=25+2\sqrt{n}.$$

Lai (∗) būtu vesels skaitlis, nepieciešams, lai (∗) kvadrāts $25+2\sqrt{n}$ būtu vesela skaitļa kvadrāts.

Tā kā $0 \le n \le \frac{625}{4}$, tad

$$25+2\sqrt{0}=25 \le 25+2\sqrt{n} \le 50 = 25+2\sqrt{\frac{625}{4}}.$$

Tāpēc $25+2\sqrt{n}$ var būt tikai $5^2=25$ vai $7^2=49$. Tad $n=0$ vai $n=144$.

106. $n^{12}-n^8-n^4+1=(n^8-1)(n^4-1)=(n^4+1)(n^2+1)(n+1)(n-1)\cdot$
$\cdot(n^2+1)(n+1)(n-1)=(n^4+1)(n^2+1)(n^2+1)\cdot((n+1)(n-1))^2$.

Tā kā n - nepāra skaitlis, n+1 un n-1 ir pāra skaitļi. Tie ir 2 pēc kārtas esoši pāra skaitļi. Tādēļ viens no tiem dalās ar 4. Tāpēc to reizinājums (n+1)(n-1) dalās ar 4·2=8, bet $((n+1)(n-1))^2$ - ar $8^2=64$.

Tā kā n - nepāra, n^2+1 un n^4+1 ir pāra, t.i., dalās ar 2. Tāpēc
$(n^4+1)(n^2+1)(n^2+1)\cdot((n+1)(n-1))^2$
dalās ar $2\cdot2\cdot2\cdot64=2^9$.

107. Pierādām to no pretējā. Pieņemam, ka $f(3)\ne g(3)$.

Tā kā $f(3)\cdot g(3)=3^2=9$ un $f(3)\ne g(3)$, viens no skaitļiem $f(3)$ un $g(3)$ ir lielāks par *3*, bet otrs - mazāks.

Apskatām gadījumu, ja $f(3)>3$ un $g(3)<3$. (Gadījums, ja $g(3)>3$ un $f(3)<3$, ir līdzīgs.)

Apzīmējam $y=f(3)$.

<u>Lemma.</u> Ja $x=\frac{y^k}{3^{k-1}}$ pie kaut kāda naturāla *k*, tad $f(x)=\frac{y^{k+1}}{3^k}$.

<u>Pierādījums.</u> Izmantojam matemātisko indukciju.

<u>Bāze.</u> Ja *k=1*, tad *x=y*. Jāpierāda, ka $f(y)=\frac{y^2}{3}$.

Tā kā $g(f(3))=3$, tad $g(y)=3$. No $f(y)\cdot g(y)=y^2$ seko, ka $f(y)=\frac{y^2}{g(y)}=\frac{y^2}{3}$.

<u>Induktīvā pāreja.</u>

Pieņemam, ka izpildās $f\left(\frac{y^k}{3^{k-1}}\right)=\frac{y^{k+1}}{3^k}$. Tad $g\left(f\left(\frac{y^k}{3^{k-1}}\right)\right)=\frac{y^k}{3^{k-1}}$, t.i., $g\left(\frac{y^{k+1}}{3^k}\right)=\frac{y^k}{3^{k-1}}$ un

$$f\left(\frac{y^{k+1}}{3^k}\right)=\frac{\left(\frac{y^{k+1}}{3^k}\right)^2}{g\left(\frac{y^{k+1}}{3^k}\right)}=\frac{y^{k+2}}{3^{k+1}}.$$

Lemma pierādīta.

Ja $k\to+\infty$, tad $\left(\frac{y}{3}\right)^k\to+\infty$ un $\frac{y^{k+1}}{3^k}=y\left(\frac{y}{3}\right)^k\to+\infty$. Tā kā $y=f(3)$ un $f(3)<4$, tad $y<4$.

Tāpēc eksistē tāds *k*, ka

$\frac{y^k}{3^{k-1}}<4$, bet $\frac{y^{k+1}}{3^k}\geq 4$.

No lemmas seko, ka $f\left(\frac{y^k}{3^{k-1}}\right)=\frac{y^{k+1}}{3^k}\geq 4$. Taču, pēc uzdevuma nosacījuma, ja $2<x<4$, tad $f(x)<4$.

Iegūta pretruna. Tāpēc $f(3)=g(3)$.

108. Vienīgais vienādojumu sistēmas atrisinājums ir x=8, y=-4, z=16. Pierādām, ka citu atrisinājumu nav.

No otrā vienādojuma seko, ka $2^z=4^x=2^{2x}$ un z=2x. Ievietojot z=2x pirmajā vienādojumā, iegūst, ka $(2x)^x=y^{2x}=(y^2)^x$. Ja x=0, tad no 2.vienādojuma arī z=0, bet 0^0 nav definēts.

Ja x≠0, iegūstam $2x=\pm y^2$.

Ievietojot z=2x un $2x=\pm y^2$ trešajā vienādojumā, iegūst

$x+y+z = x+y+2x = y+3x = y\pm\frac{3}{2}y^2 = 20$.

Vienādojumam $y+\frac{3}{2}y^2 = 20$ ir 2 saknes: -4 un $3\frac{1}{3}$.

Vienādojumam $y-\frac{3}{2}y^2 = 20$ sakņu nav.

No y=-4 iegūstam x=8, z=2x=16.

109. Sākumā nosakām, cik daudz ir *k*-ciparu skaitļu, kuru cipari veido stingri augošu virkni. Šādu *k*-ciparu skaitļu skaitu apzīmējam ar m_k.

Lemma. $m_k=C_9^k$.

Pierādījums. Apskatām ciparu virknīti *1,2,3,4,5,6,7,8,9*. No šīs virknītes *k* ciparus, kas veido *k*-ciparu skaitli, var izvēlēties C_9^k veidos, bet tos sakārtot tā, lai veidotos stingri augoša ciparu virkne - 1 veidā. Lemma pierādīta.

Piezīme. Cipars *0* nevar būt sastopams skaitļos, kuru cipari veido stingri augošu virkni: ja *0* būtu šāda skaitļa cipars, tad tai būtu jābūt skaitļa pirmajam ciparam.

Ar *I* apzīmējam visu to skaitļu kopu, kuru cipari veido stingri augošu virkni, ar *D* - to skaitļu kopu, kuru cipari veido stingri dilstošu virkni, ar D_0 - visu to skaitļu kopu, kuru cipari veido stingri dilstošu virkni un kuri sākas ar *9*, ar D_1 - visu to skaitļu kopu, kuri nesākas ar *9* un kuru cipari veido stingri dilstošu virkni. Savukārt D_2 un D_3 būs to skaitļu, kuru cipari veido stingri dilstošu virkni un kuri beidzas ar 0 (D_2) resp. nebeidzas ar 0 (D_3) kopas.

$S(I), S(D), S(D_0),\ldots$ būs visu skaitļu no kopām $I, D, D_0,\ldots$ summas.

Apskatām skaitli $\overline{a_1\cdots a_k}$ (pirmais cipars - a_1, otrais - a_2, …, pēdējais - a_k). Ja šī skaitļa cipari veido stingri augošu virkni, tad tam var piekārtot skaitli $\overline{b_1\cdots b_k}$, kur $b_1=9-a_1,\ldots,b_k=9-a_k$. Tā kā $a_1<\ldots<a_k$, tad $b_1>\ldots>b_k$. Pie tam, tā kā $a_1\geq 1$, tad $b_1=9-a_1\leq 8$. Tāpēc $\overline{b_1\cdots b_k}$ pieder kopai D_1.

Tādā veidā katram skaitlim no kopas I tiek piekārtots viens skaitlis no D_1 un katram skaitlim no D_1 - viens skaitlis no I. Pie tam

$$\overline{a_1\cdots a_k}+\overline{b_1\cdots b_k} = \underbrace{9\cdots 9}_{k \text{ deviitnieki}}.$$

Tādēļ visu k-ciparu skaitļu no kopas I un visu k-ciparu skaitļu no D_1 summa ir

$$\underbrace{99\cdots 9}_{k}\cdot m_k = \underbrace{9\cdots 9}_{k}\cdot C_9^k.$$

Tāpēc

$$S(I)+S(D_1)=\sum_{k=1}^{9} C_9^k \underbrace{9\cdots 9}_{k} = \sum_{k=1}^{9} C_9^k\left(10^k-1\right)=11^9-2^9.$$

Līdzīgā veidā katram skaitlim $\overline{a_1\cdots a_k}$ no kopas I var piekārtot skaitli $\overline{9b_1\cdots b_k}$ no kopas D_0, kur $b_1=9-a_1, \ldots, b_k=9-b_k$. Tad

$$\overline{a_1\cdots a_k}+\overline{9b_1\cdots b_k} = \underbrace{9\cdots 9}_{k+1 \text{ devitnieki}}.$$

Ņemot vērā arī piekārtojumā neietverto D_0 elementu 9,

$$S(I)+S(D_0)=\sum_{k=0}^{9} C_9^k \underbrace{9\cdots 9}_{k+1} = \sum_{k=0}^{9} C_9^k\cdot\left(10^{k+1}-1\right) = 10\cdot 11^9-2^9.$$

Katrs no kopas D skaitļiem pieder tieši vienai no kopām D_0 un D_1. Tādēļ $S(D_0)+S(D_1)=S(D)$ un

$2S(I)+S(D) = (11^9-2^9)+(10\cdot 11^9-2^9) = 11^{10}-2^{10}$. (*)

Skaitlim $\overline{a_1\cdots a_k}$ no kopas I var piekārtot skaitli $\overline{b_1\cdots b_k}$ no D_3, kur $b_1=10-a_1,\ldots, b_k=10-a_k$. Tad

$$\overline{a_1\cdots a_k}+\overline{b_1\cdots b_k} = \underbrace{1\cdots 1}_{k}0 = \frac{1}{9}\left(10^{k+1}-10\right)$$

$$S(I)+S(D_3)=\sum_{k=0}^{9} C_9^k\cdot\frac{1}{9}\left(10^{k+1}-10\right)=\frac{1}{9}\left(10\cdot 11^9-10\cdot 2^9\right).$$

Ja skaitlim no kopas D_3 (skaitlim, kura cipari veido stingri dilstošu virkni un kurš nebeidzas ar 0) beigās pieraksta 0, tad iegūst skaitli, kurš beidzas ar 0 un kura cipari veido stingri dilstošu virkni, t.i., skaitli no kopas D_2.

Skaitlim $\overline{a_1\cdots a_k}$ beigās pierakstot 0, iegūst $\overline{a_1\cdots a_k 0}=10\cdot\overline{a_1\cdots a_k}$. Tas nozīmē, ka jebkuru kopas D_2 skaitli var iegūt, pareizinot atbilstošu kopas D_3 skaitli ar 10. Tāpēc

$S(D_2) = 10\cdot S(D_3)$.

Katrs kopas D skaitlis pieder tieši pie vienas no kopām D_2 un D_3. Tādēļ

$S(D) = S(D_2)+S(D_3) = 11\cdot S(D_3)$ un

$S(D_3) = \frac{1}{11}\cdot S(D)$. Tad

$S(I)+\frac{1}{11}\cdot S(D) = S(I)+S(D_3) = \frac{1}{9}(10\cdot 11^9-10\cdot 2^9)$. (**)

Atrisinot vienādojumu sistēmu, ko veido (*) un (**), var iegūt *S(I)* un *S(D)* vērtības. Tā var izrēķināt, ka

$$S(I)+S(D)=\frac{80}{81}\cdot 11^{10}-\frac{35}{81}\cdot 2^{10}.$$

Viencipara skaitlim *1* tā vienīgais cipars veido gan stingri augošu, gan stingri dilstošu virkni. Tāpēc *1* pieder gan *I,* gan *D*. Līdzīgi, gan *I,* gan *D* pieder *2;3;…;9.* Tas nozīmē, ka šie skaitļi summā *S(I)+S(D)* ir ieskaitīti divreiz.

Tāpēc visu to skaitļu, kuru cipari veido stingri augošu vai stingri dilstošu virkni, summa ir

$S(I)+S(D)-(1+2+\ldots+9)=$

$$=\left(\frac{80}{81}\cdot 11^{10}-\frac{35}{81}\cdot 2^{10}\right)-45 = 25617208995.$$

110. Saskaitot vienādojumus $x^5=y+y^5$, $y^5=z+z^5$, $z^5=t+t^5$ un $t^5=x+x^5$, iegūst, ka

$(x^5+y^5+z^5+t^5) = (x+y+z+t) + (x^5+y^5+z^5+t^5)$

$x+y+z+t = 0.$

Ja $x>0$, tad $x+x^5>0$, t.i., $t^5>0$ un $t>0$.

Tāpat pierāda, ka $z>0$ un $y>0$. Tādējādi, ja $x>0$, tad $x+y+z+t>0$.

Līdzīgi var pierādīt, ka, ja $x<0$, tad $x+y+z+t<0$.

Tāpēc $x=0$. Līdzīgi pierāda, ka $y=0$, $z=0$ un $t=0$.

Tādējādi vienīgais vienādojumu sistēmas atrisinājums ir $x=y=z=t=0$.

111. Izmantosim matemātisko indukciju. Ja *n=1*, apgalvojums acīmredzams. Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs jebkuram *n<m*, un aplūkosim situāciju, kad *n=m*.

Pieņemsim pretējo, ka kādam virknes (a_n) un (b_n) pārim apgalvojums pie n=m nav pareizs. Tad eksistē tāds *k*, ka

$|a'_k-b'_k|>|a_i-b_i|$ visiem *i=1;2;…;m.*

Apskatām pārkārtošanas rezultātā iegūtās augošās virknes

$$\left|\underbrace{\begin{matrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & \cdots & a'_{k-1} \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & \cdots & b'_{k-1}\end{matrix}}_{\text{I}}\right| \begin{matrix} a'_k \\ b'_k \end{matrix} \left|\underbrace{\begin{matrix} a'_{k+1} & \cdots & a'_m \\ b'_{k+1} & \cdots & b'_m\end{matrix}}_{\text{II}}\right|.$$

Varam pieņemt, ka $\underline{a'_k \le b'_k}$.

Tālāk šķirojam 2 gadījumus.

Teiksim, ka skaitlis no virknes *a* bijis pārī ar skaitli no virknes *b*, ja tiem pirmajā sakārtojumā bijuši vienādi indeksi.

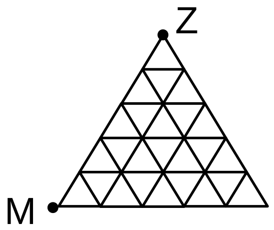
A. Skaitļi no virknes *a I* (resp.*II*) grupas bijuši pāros tikai ar skaitļiem no virknes *b I* (resp.*II*) grupas. Tad saskaņā ar induktīvo pieņēmumu starpību moduļu maksimums ne *I,* ne *II* grupā nav palielinājies. Tāpat $|a_k-b_k|=|a'_k-b'_k|$. Tāpēc vajadzīgais pierādīts.

B. Punkta A nosacījums neizpildās. Tad ir kāds $a'_t,\ t<k$, kas bijis pārī ar kādu $b'_s,\ s\ge k$. Atceramies, ka $a'_t<a'_k\le b'_k\le b'_s$.

Tad $|a'_t-b'_s|>|a'_k-b'_k|$ - pretruna.

Induktīvā pāreja izdarīta.

112. Zirneklis pārvietojas tā, lai pēc viņa gājiena taisne, kas savieno viņu un mušu, paliktu paralēla malai ZM, pie tam, ja iespējams, viņš izdara gājienu tā, lai attālums starp horizontālēm, uz kurām atrodas viņš un muša, samazinātos. Minētais attālums nemainīsies tikai tad, ja muša virzās uz leju vai pa horizontāli pa kreisi, bet šie procesi nevar turpināties bezgalīgi.



58. zīm.

Ik pa brīdim mušai jāizdara gājiens vai nu pa labi, vai uz augšu, un pēc atbilstošā zirnekļa gājiena attālums starp mušu un zirnekli būs samazinājies. Kādreiz tas kļūs 0.

113. Ar A apzīmējam autobusa līniju skaitu, V - vilciena līniju skaitu, L - aviolīniju skaitu.

Pierādām, ka

$$A+V\geq 12.$$

Apskatām grafu, kura virsotnes ir 13 pilsētas. Šajā grafā 2 virsotnes ir savienotas ar šķautni tad, ja starp tām ir autobusa vai vilciena satiksme. Plaši zināma sekojoša teorēma.

Teorēma. Ja grafā ar n virsotnēm var nokļūt no jebkuras virsotnes uz jebkuru citu, tad šajā grafā ir vismaz n-1 šķautne.

No šīs teorēmas seko, ka grafā ir $\geq 13-1=12$ šķautnes, t.i., $A+V\geq 12$. Līdzīgi

$A+L\geq 12$, $V+L\geq 12$.

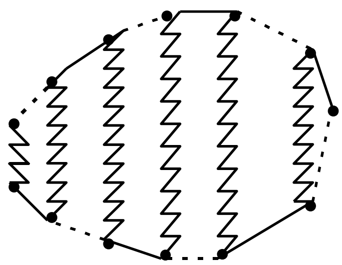
Saskaitot šīs nevienādības, iegūst

$2(A+V+L)\geq 36$

$A+V+L\geq 18$.

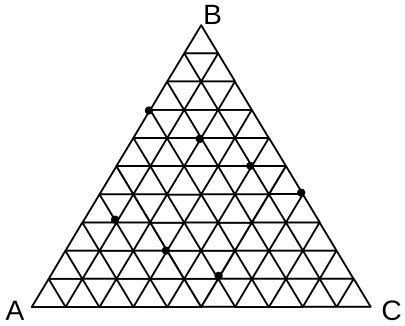
Tātad pilsētu pāru, starp kurām nodibināta autobusa, lidmašīnas vai vilciena satiksme, ir vismaz 18.

To, ka ar 18 pilsētu pāriem pietiek, parāda 59. zīm.



59.zīm.

114. 7 virsotnes (sk. 60. zīm.). Pierādām no pretējā, ka vairāk virsotņu izvēlēties nevar. Pieņemam, ka var izvēlēties 8 virsotnes. Apzīmējam tās ar $V_1, V_2, \ldots, V_8$.



60. zīm.

Pieņemam, ka katra mazā trijstūra augstums ir 1. Tad lielā trijstūra augstums ir 10. Ar a_1,b_1,c_1 apzīmējam attālumus no V_1 līdz malām BC,AC,AB, atbilstoši ar a_2,b_2,c_2 - - attālumus no V_2 līdz šīm malām, … ar a_8,b_8,c_8 - attālumus no V_8 līdz šīm malām.

Viegli pierādīt, ka

$a_1+b_1+c_1 = 10$

$a_2+b_2+c_2 = 10$

…………..

$a_8+b_8+c_8 = 10.$

Saskaitot šīs vienādības, iegūst

$(a_1+\ldots+a_8)+(b_1+\ldots+b_8)+(c_1+\ldots+c_8) = 80.$ (*)

Ja diviem punktiem V_i un V_j $a_i=a_j$, tad V_i un V_j atrodas uz taisnes, kas paralēla BC. Tādēļ visiem $a_1,\ldots,a_8$ jābūt dažādiem. Pie tam, tā kā $V_1,\ldots,V_8$ - trijstūru virsotnes, tad $a_1,\ldots,a_8$ jābūt veseliem skaitļiem.

Mazākais no $a_1,\ldots,a_8$ var būt 0, otram mazākajam jābūt ≥ 1,… astotajam mazākajam - ≥ 7. Tādēļ

$a_1+\ldots+a_8 \geq (0+1+\ldots+7) = 28.$

Līdzīgi

$b_1+\ldots+b_8 \geq 28$ un $c_1+\ldots+c_8 \geq 28.$

Tādēļ $(a_1+\ldots+a_8)+(b_1+\ldots+b_8)+(c_1+\ldots+c_8) \geq 84.$

Tas ir pretrunā ar (*).

115. Pietiek izņemt 8 virsotnes (61. zīm. izņemtās virsotnes atzīmētas ar krustiņiem).

•	•	•	•	•
•	×	×	×	•
•	×	×	•	•
•	×	•	×	•
•	•	•	•	×

61. zīm.

Pierādīsim no pretējā, ka, izņemot 7 virsotnes, starp palikušajām noteikti atradīsies 4 tāda kvadrāta virsotnes, kura malas paralēlas sākotnējā kvadrāta malām. Šķirosim vairākus gadījumus.

1. Augšējā vai apakšējā rindā nav izmesta neviena virsotne; varam pieņemt, ka tā ir augšējā rinda.

Sanumurējam punktus, kā parādīts 62. zīm. Ar ij apzīmējam punktu, kas atrodas i.-jā rindā, skaitot no augšas, un j.-ā kolonnā, skaitot no kreisās puses.

11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35
41	42	43	44	45
51	52	53	54	55

62. zīm.

Aplūkojot kvadrātus (11,21,22,12) un (13,23,24,14), redzam, ka no 2. rindas jāizmet vismaz divas virsotnes. Līdzīgi viegli iegūt, ka arī no 3. un 4. rindas jāizmet vismaz divas virsotnes.

Apskatot kvadrātu (11,15,55,51), redzam, ka jābūt izmestai vismaz vienai no virsotnēm 51 un 55. Tas kopā jau dod 7 izmestas virsotnes. Turklāt skaidrs, ka varam pieņemt: 5. rindā izmesta virsotne 51.

Apskatot, kuras divas virsotnes izmestas 4. rindā, viegli konstatēt: ja tās nav 42 un 44, tad vai nu 4. un 5., vai 4. un 1. rindas veido “nesabojātu” kvadrātu. Tāpēc apskatām situāciju, kad 4. rindā izmestas 42 un 44.

Apskatot 1. un 2. rindu, viegli saprast, ka no 2. rindas jāizmet 22 un 24. Taču tad kvadrāts (21 23 43 41) nav sabojāts.

Tātad šis gadījums izanalizēts.

2. Otrajā, trešajā vai ceturtajā rindā nav izmesta neviena virsotne.

Analīze ir līdzīga 1. gadījuma analīzei. Atstājam to veikt lasītājam patstāvīgi.

3. No katras rindas izmesta vismaz viena virsotne.

Šajā gadījumā ir vismaz 3 rindas, no kurām izmesta tikai viena virsotne. Šķirojam vairākus apakšgadījumus.

a) minētās trīs rindas atrodas blakus; varam pieņemt, ka tās ir 1., 2. un 3. rindas.

Viegli pārbaudīt, ka neatkarīgi no tā, kuras virsotnes izmestas, vismaz viens kvadrāts paliek nesabojāts.

b) ja minētās rindas nav blakus, arī bez grūtībām var veikt gadījumu pilnu pārlasi.

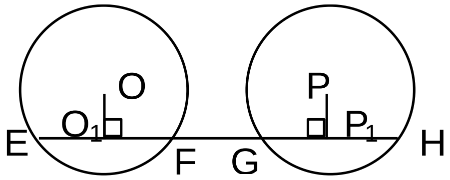
116. Jā. Viegli pārbaudīt, ka uzdevuma prasības būs izpildītas, uz viena kauliņa skaldnēm uzrakstot 1;2;3;4;5;6, bet uz otra skaldnēm 1;1;1;7;7;7. 63. zīm. redzamas iespējamās summas; katra vērtība parādās tieši 3 reizes.

I\II	1	1	1	7	7	7
1	2	2	2	8	8	8
2	3	3	3	9	9	9
3	4	4	4	10	10	10
4	5	5	5	11	11	11
5	6	6	6	12	12	12
6	7	7	7	13	13	13

63. zīm.

117. Apzīmējam pirmās riņķa līnijas centru ar *O*, bet otrās centru - ar *P*. Pierādām, ka *O* un *P* atrodas dažādās pusēs no *EF*.

Pieņemam pretējo. Novelkam no *O* un *P* perpendikulus pret taisni *EF*. Apzīmējam to krustpunktus ar taisni *EF* ar O_1 un P_1. Tā kā $EF=GH$, tad $OO_1=PP_1$. Tādēļ OO_1P_1P - taisnstūris un $OP=O_1P_1$.



64. zīm.

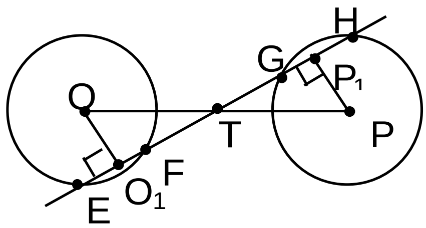
Viegli atrast, ka $O_1F = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$.

Līdzīgi $GP_1=3$. Tāpēc $OP=O_1P_1=O_1F+FG+GP_1=3+6+3=12$.

Riņķa līnijas nekrustojas. Tāpēc to rādiusi ir mazāki par pusi no attāluma *OP*, t.i., mazāki par *6*. Tad diametri nepārsniedz *12*. Taču *A* un *B* atrodas uz riņķa līnijas ar centru *O*. Tāpēc *AB* nedrīkst pārsniegt šīs riņķa līnijas diametru, kas ir mazāks par *12*. Bet uzdevuma nosacījumā dots, ka $AB=14$. Pretruna.

Tādēļ *O* un *P* atrodas dažādās pusēs no taisnes *EF*.

Apzīmējam punktu, kurā krustojas *OP* un *EF*, ar *T*, bet riņķa līniju rādiusu - ar *r*.



65. zīm.

$OO_1=PP_1$, bet $\angle OTO_1=\angle PTP_1$ (kā krustleņķi).

Tādēļ $\Delta OO_1T=\Delta PP_1T$ un $OT=TP$.

Pēc Pitagora teorēmas

$$OO_1 = \sqrt{OF^2 - FO_1^2} = \sqrt{r^2 - 3^2}$$

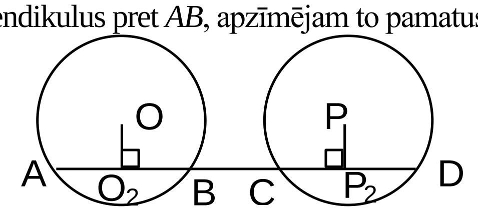
$$OT = \sqrt{OO_1^2 + O_1T^2} = \sqrt{\left(r^2 - 3^2\right) + \left(\frac{O_1P_1}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - 3^2 + 6^2} = \sqrt{r^2 + 27}\,.$$

Ja *O* un *P* atrastos dažādās pusēs no *AB*, tad līdzīgā veidā varētu izrēķināt, ka

$$OT = \sqrt{r^2 - 7^2 + 14^2} \neq \sqrt{r^2 + 27}\,.$$

Tādēļ *O* un *P* atrodas vienā pusē no *AB*.

Novelkam no *O* un *P* perpendikulus pret *AB*, apzīmējam to pamatus ar O_2 un P_2.



66. zīm.

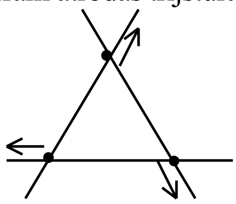
$OP=O_2P_2=O_2B+BC+CP_2=\dfrac{AB}{2}+BC+\dfrac{CD}{2}=28;$

$OT=\dfrac{OP}{2}=\dfrac{28}{2}=14.$

Tā kā $OT=\sqrt{r^2+27}$, tad $r^2=OT^2-27=169$ un $r=13$.

118. Jā, tas ir iespējams.

Sākumā novieto punktus vienādmalu trijstūra virsotnēs "nulles" momentā un liek tiem kustēties ar vienādiem ātrumiem pa taisnēm, uz kurām atrodas trijstūra malas (sk. 67. zīm.).



67. zīm.

Jebkurā brīdi, gan pagātnē, gan nākotnē, punkti atradīsies kaut kāda vienādmalu trijstūra virsotnēs un tādēļ nevarēs atrasties uz vienas taisnes.

Uzdevuma nosacījumā ir pieprasīts, lai punktu ātrumi būtu atšķirīgi. To var panākt šādi.

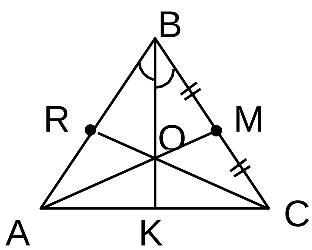
Apskatām kādu nenulles vektoru $\vec{v}$, kura projekciju uz trim taisnēm garumi visi trīs ir dažādi. Pieskaitām šo vektoru pie katra punkta ātruma vektora. Tad visu trīs punktu ātrumi būs atšķirīgi.

Vektora $\vec{v}$ pieskaitīšana pie visu trīs punktu ātruma vektoriem ir ekvivalenta trīs punktu "bīdīšanai" pa plakni ar ātrumu $\vec{v}$. Tādēļ trīs punkti joprojām jebkurā laika momentā atradīsies vienādmalu Δ virsotnēs, t.i., nebūs uz vienas taisnes.

119. Novelkam taisni *CO*. Apzīmējam tās krustpunktu ar malu *AB* ar *R*. Tā kā *AM* - mediāna, tad

$$\frac{AR}{RB}=\frac{AK}{KC}.$$

BK ir bisektrise. Tādēļ attiecība starp nogriežņiem, kuros tā sadala malu *AC*, ir tāda pati, kā attiecība starp malām *AB* un *BC :*



68. zīm.

$\dfrac{AK}{KC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{15}{12}=\dfrac{5}{4}.$

Tādēļ $\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{5}{4}$ un $AR=\dfrac{25}{3}$, $RB=\dfrac{20}{3}$.

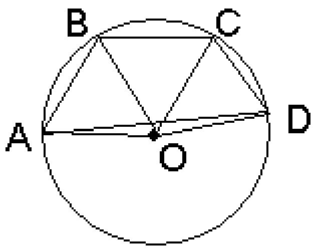
Tāpēc $AR^2 - BR^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2 - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = 25 = AC^2 - BC^2$.

Tas nozīmē, ka *CR* ir trijstūra augstums un *R* sakrīt ar punktu *L*.

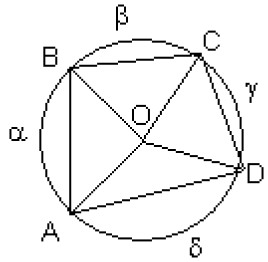
Taisne *KR* ir paralēla *CB*. Tāpēc $\angle KRO = \angle OCB$. Savukārt *M* ir taisnleņķa ΔBRC apvilktās riņķa līnijas centrs.

Tādēļ $\angle OCB = \angle ORM$ un $\angle KRO = \angle ORM$.

120. Ievērosim: ja O atrodas ārpus ABCD, tad
$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA < 360^0$ (sk. 69. zīm.).



69.zīm.



70. zīm.

Tātad O atrodas ABCD iekšpusē (skaidrs, ka O nav uz malas, jo ABCD leņķu lielumi nevar būt 180^0).

Apzīmējam loku AB, BC, CD, DA lielumus, kā parādīts 70. zīm. No centra leņķa un ievilkta leņķa īpašībām un uzdevuma nosacījumiem seko, ka lielumi

$$\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\delta+\alpha}{2}$$

ir kaut kādā kārtībā ņemti lielumi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Tāpēc pastāv vienādība

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta+\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

kas identiski pārveidojas par

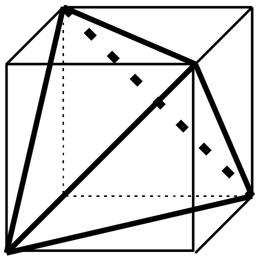
$$(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\delta)^2 + (\delta-\alpha)^2 = 0,$$

no kurienes seko $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

No tā seko vajadzīgais.

121. Viegli aprēķināt, ka 71. zīm. redzamajam tetraedram tilpums ir $\frac{1}{3}$. Aplūkojot šī tetraedra homotētiskos attēlus ar homotētijas centru A un koeficientu 0<x<1, iegūstam, ka iespējami arī visi tilpumi V, kur $0 < V < \frac{1}{3}$.

Tādējādi, ja mēs parādīsim, ka 71. zīm. redzamā tetraedra tilpums ir lielākais iespējamais, uzdevums būs atrisināts.



71. zīm.

Katrs tetraedrs, kas atrodas kuba iekšpusē, atrodas arī tam apvilktās lodes iekšpusē. Bet labi zināms, ka no tādiem tetraedriem lielākais tilpums ir tam lodē ievilktajam tetraedram, kam visas šķautnes vienādas. Atliek atzīmēt, ka 71. zīm. redzamais tetraedrs ir tieši šāda tipa.

35. starptautiskā matemātikas olimpiāde (122. – 127.)

122. Acīmredzot varam uzskatīt, ka $a_1<a_2<\ldots<a_m$.

Iedomāsimies, ka esam jau pierādījuši nevienādības

$a_1+a_m \geq n+1$, $a_2+a_{m-1} \geq n+1$, … , $a_{m-1}+a_2 \geq n+1$, $a_m+a_1 \geq n+1$.

Tad, saskaitot tās, iegūstam

$2(a_1+\ldots+a_m) \geq m(n+1)$, no kurienes seko vajadzīgais.

Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda: kādam i pastāv nevienādība

$a_i+a_{m-i+1}<n+1$ $(1 \leq i \leq m)$.

Ievērosim, ka tādā gadījumā (summas ir naturāli skaitļi)

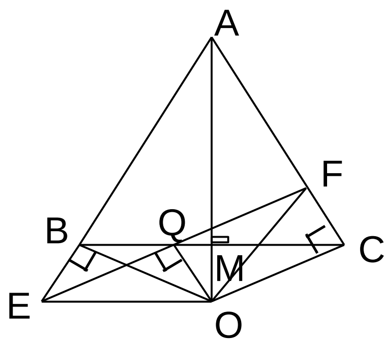
$a_i<a_i+a_1<a_i+a_2<\ldots<a_i+a_{m-i+1} \leq n$.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem iegūstam, ka summas

a_i+a_1, a_i+a_2, … , a_i+a_{m-i+1} ir A elementi.

To skaits ir m-i+1, un tās visas lielākas par a_i. Bet kopā A ir tikai m-i elementi (tie ir a_{i+1}, a_{i+2}, …, a_m), kas lielāki par a_i. Iegūtā pretruna pierāda mūsu apgalvojumu.

123. Vispirms pieņemam, ka $OQ \perp EF$ (sk. 72. zīm.).



72. zīm.

Simetrijas pēc $OC \perp AC$. Tā kā $\angle OQF + \angle OCF = 180^0$, tad ap OQFC var apvilkt riņķa līniju. Tā kā $\angle EBO = \angle EQO$ ($=90^0$), tad ap EBQO var apvilkt riņķa līniju. Tad no ievilktu leņķu īpašībām

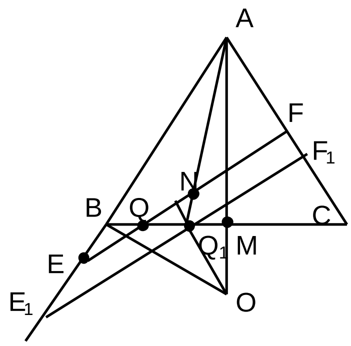
$\angle OEF = \angle OBC$ (1)

$\angle OFQ = \angle OCQ$ (2)

Simetrijas dēļ $\angle OBC = \angle OCQ$ (3)

No (1), (2), (3) seko $\angle OEF = \angle OFQ$, tātad ΔEOF ir vienādsānu. Augstums pret pamatu ir arī mediāna, tāpēc $EQ=QF$.

Tagad pieņemsim, ka $EQ=QF$, bet perpendikuls no O pret EF krusto malu BC nevis punktā Q, bet gan punktā Q_1 (sk. 73. zīm.).



73. zīm.

Novelkam caur Q_1 nogriezni E_1F_1 paralēli EF. No iepriekš pierādītā seko, ka $E_1Q_1=Q_1F_1$. No šī fakta un ΔAEF un ΔAE_1F_1 līdzības seko, ka $EN=NF$. Bet nevar vienlaicīgi pastāvēt vienādības $EQ=QF$ un $EN=NF$. Tātad mūsu pieņēmums nepareizs.

124. Apzīmēsim ar g(n) to naturālo skaitļu skaitu kopā $\{1;2;\ldots;n\}$, kuru binārajā pierakstā ir tieši trīs vieninieki. Skaidrs, ka $g(n)$ ir nedilstoša funkcija un $f(k)=g(2k)-g(k)$. Parādīsim, ka arī $f(n)$ ir nedilstoša funkcija. Tiešām, $f(n+1)$, salīdzinot ar $f(n)$, "neaplūko" skaitli $n+1$, bet "aplūko" divus jaunus skaitļus $2n+1$ un $2n+2$. Tā kā $2n+2=2(n+1)$, tad $n+1$ un $2n+2$ binārajos pierakstos vieninieku daudzumi ir vienādi. Tāpēc skaidrs, ka

$f(k+1)-f(k)$ vērtība ir 1 vai 0, atkarībā no tā, vai $2k+1$ savā pierakstā satur vai nesatur tieši trīs vieniniekus.

Viegli pārliecināties, ka $f(1)=0$. Ja mēs pierādīsim, ka $f(n)$ vērtības var kļūt cik patīk lielas, tad no līdzšinējiem rezultātiem sekos, ka $f(n)$ kā vērtības pieņem visus naturālos skaitļus un 0; tad uzdevuma a) daļa būs atrisināta.

Ievērosim, ka $f(2^n)=g(2^{n+1})-g(2^n)$, bet $g(2^k)=g(2^k-1)$.

Savukārt $g(2^k\text{-}1)=C_k^3$ (k ciparu virknē jāizraugās trīs vietas, kurās atrodas vieninieki). Tāpēc

$$f\left(2^n\right)=C_{n+1}^3-C_n^3=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n(n-1)}{2};$$

tātad $f(2^n)$, n augot, tiecas uz bezgalību.

Uzdevuma a) daļa atrisināta.

Tagad pieņemsim, ka vienādojumam $f(x)=m$ ir viens vienīgs atrisinājums.

Tas nozīmē: funkcijas $f(x)$ augšanas procesā pirmo reizi sasniegtā vērtība m tūlīt "nākošajā solī" tiek pārsniegta. Tas savukārt nozīmē, ka

$f(x+1)-f(x)=1$ un $f(x)-f(x-1)=1$

(ar x apzīmējam minēto vienīgo atrisinājumu).

Tātad $2x+1$ pierakstā ir trīs vieninieki, tāpēc x pierakstā ir divi vieninieki. Līdzīgi $x-1$ pierakstā arī ir divi vieninieki. Tāpēc x=$1\underbrace{00\cdots 0}_{\geq 0\ \text{nullu}}010=2^t+2$ kādam naturālam t, $t\geq 2$.

Šādiem x viegli aprēķināt

$$f(x)=g(2^{t+1}+4)-g(2^t+2)=1+g(2^{t+1})-g(2^t)=1+C_{t+1}^3-C_t^2 = 1+\frac{t(t-1)}{2}.$$

125. Viegli saprast, ka naturāliem m un n skaitļi $m\cdot n-1$ un m^3 ir savstarpēji pirmskaitļi (ja $m\cdot n-1$ un m^3 dalās ar pirmskaitli p, tad arī m, $m\cdot n$ un $m\cdot n-(m\cdot n-1)=1$ dalās ar p - pretruna). Tāpēc nosacījumu, ka n^3+1 dalās ar $m\cdot n-1$, var aizstāt ar nosacījumu, ka $m^3(n^3+1)$ dalās ar $m\cdot n-1$. Bet

$m^3(n^3+1)=(mn)^3-1^3+(m^3+1)$.

Tā kā $(mn)^3-1^3$ dalās ar $mn-1$, seko, ka arī m^3+1 dalās ar $mn-1$.

Ja $m=n$, tad $\dfrac{m^3+1}{m^2-1}=m+\dfrac{1}{m-1}$; šī izteiksme ir naturāls skaitlis, tātad $m=2$.

Ja $m\neq n$, tad varam pieņemt, ka $m>n$. Gadījumā, ja $n=1$, no nosacījuma, ka n^3+1 dalās ar $m\cdot n-1$, iegūstam $m=2$ vai $m=3$. Apskatīsim gadījumu $n\geq 2$.

Apzīmēsim $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=Q$ un noskaidrosim, kādu atlikumu r dod Q, dalot ar n. Ja $Q=qn+r$, tad no vienādības $n^3+1=(mn-1)(qn+r)$, kas pārveidojas par

$n^3+(1+r)=mqn^2+mnr-qn$,

secinām, ka $r+1$ dalās ar n. Tātad $r=n-1$ un $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=kn-1$, kur k - naturāls skaitlis.

Tātad $kn-1=\dfrac{n^3+1}{mn-1}<\dfrac{n^3+1}{n^2-1}=n+\dfrac{1}{n-1}$;

no šejienes seko

$$(k-1)n+(n-1)<n+\frac{1}{n-1}.$$

Acīmredzot, ja $k\geq 2$, tā ir pretruna. Tāpēc $k=1$ un iegūstam $(n^3+1)=(mn-1)(n-1)$, no kurienes $m=n+1+\dfrac{2}{n-1}$. Lai m būtu naturāls, jābūt $n=2$ vai $n=3$; abos gadījumos iegūstam $m=5$.

Atceroties, ka var būt arī $n>m$, iegūstam pavisam 9 atrisinājumus:

(2;2), (1;2), (1;3), (2;5), (3;5), (2;1), (3;1), (5;2), (5;3).

126. Noskaidrosim, vai vienādojumam f(x)=x var būt saknes.

Pieņemsim, ka f(k)=k un -1<k<0. Ievietojot b) nosacījumā x=y=k, iegūstam

$f(k+k+k^2)=k+k+k^2$, t.i., $f(k^2+2k)=k^2+2k$.

Tas nozīmē, ka arī k^2+2k ir minētā vienādojuma sakne. Viegli pārbaudīt: ja $-1<k<0$, tad arī $-1<k^2+2k<0$, jo $k^2+2k=(k+1)^2-1$. Bet no a) nosacījuma seko, ka intervālā (-1;0) mūsu vienādojumam ir tikai viena sakne. Tāpēc $k^2+2k=k$, no kurienes $k=-1$ vai $k=0$; iegūta pretruna.

Līdzīgi iegūstam pretrunu no pieņēmuma, ka vienādojumam eksistē sakne apgabalā $(0;+\infty)$. Tātad vienīgā $f(x)=x$ sakne varētu būt 0. No otras puses, ievietojot b) y vietā x, iegūstam identitāti

$f(x+f(x)+xf(x)) = x+f(x)+xf(x)$,

t.i., katram x lielums $x+f(x)+xf(x)$ ir mūsu apskatāmā vienādojuma sakne.

Tāpēc pastāv identitāte

$x+f(x)+xf(x) = 0$, no kurienes

$$f(x)=-\frac{x}{1+x}.$$

Pārbaude parāda, ka šī funkcija apmierina visas uzdevuma prasības.

127. Kopā A ieskaitām sekojošus skaitļus:

a) visus dažādu pirmskaitļu reizinājumus pa 2, kuros mazākais reizinātājs ir 2 (t.i., skaitļus $2\cdot3$, $2\cdot5$, $2\cdot7,\ldots$);

b) visus dažādu pirmskaitļu reizinājumus pa 3, kuros mazākais reizinātājs ir 3 (t.i., skaitļus $3\cdot5\cdot7$, $3\cdot11\cdot97$ utt.)

.
.
.

Vispār, katram pirmskaitlim *p* kopā A ieskaitām visus dažādu *p* pirmskaitļu reizinājumus, kuros mazākais reizinātājs ir *p*.

Pieņemsim, ka dota bezgalīga pirmskaitļu kopa $p_1<p_2<\ldots$. Veidosim *m* un *n* kā p_1 pirmskaitļu reizinājumus:

$m = p_1 \cdot p_2 \cdot\ldots\cdot p_{p_1}$ un

$n = p_2 \cdot p_3 \cdot\ldots\cdot p_{p_1+1}$.

Skaidrs, ka *m* ir kopas A elements. Jāpierāda, ka *n* nepieder kopai A. Skaitlis *n*, būdams p_1 dažādu pirmskaitļu reizinājums, varētu piederēt A tikai tad, ja tā mazākais pirmreizinātājs būtu p_1, bet tā nav.

LITERATŪRA

1. 35.Starptautiskās matemātikas olimpiādes žūrijas materiāli.
2. Komandu olimpiādes “Baltijas Ceļš - 93” žūrijas materiāli.

Virkne uzdevumu aizgūti no citiem autoriem:

◊ Aivars Bērziņš: 40., 72., 73., 74., 96., 98.

◊ CRUX MATHEMATICORUM: 67., 75., 87.

◊ Krievijas matemātikas olimpiādes: 28., 69., 88.

◊ Sankt-Pēterburgas matemātikas olimpiādes: 41., 50., 58.

◊ Skotijas neklātienes konkursi: 24., 63.

◊ Vissavienības matemātikas olimpiāde: 93.