Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi

9.1. Atrast visus tādus naturālus skaitļus *n* un *m*, kuriem $\dfrac{2015}{n^4-m^4}$ arī ir naturāls skaitlis!

Atrisinājums

Ievērojam, ka $n^4-m^4=(n-m)(n+m)(n^2+m^2)$. Tā kā n un m ir naturāli skaitļi, tad $\dfrac{2015}{(n-m)(n+m)(n^2+m^2)}$ var būt naturāls skaitlis tikai tad, ja $n>m\geq 1$. Līdz ar to $1\leq n-m<n+m<n^2+m^2$. Tas nozīmē, ka $n-m,\ n+m$ un n^2+m^2 ir trīs dažādi skaitļa 2015 dalītāji. Sadalām skaitli 2015 pirmreizinātājos: $2015=5\cdot 13\cdot 31$. Uzrakstām augošā secībā visus skaitļa 2015 dalītājus: 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015.

Novērtējam saucēja izteiksmi:

$$n^4-m^4\geq n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1=4n(n-1)^2+2n^2-1>4(n-1)^3-1.$$

Tā kā $n^4-m^4\leq 2015$, tad arī $4(n-1)^3-1<2015$. No kurienes iegūstam, ka $(n-1)^3<504<512=8^3$, tātad $n-1<8$ jeb $n<9$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka lielākā iespējamā *n* vērtība ir 8 un $n+m\leq 8+7=15$. Apskatām visus iespējamos gadījumus.

$n-m$	$n+m$	n	m	n^2+m^2	
1	5	**3**	**2**	13	Der, jo $2015:(1\cdot 5\cdot 13)=31$.
1	13	7	6	85	Neder, jo nav 2015 dalītājs.
5	13	9	4	97	Neder, jo nav 2015 dalītājs.

Tātad vienīgās iespējamās vērtības ir $n=3$ un $m=2$.

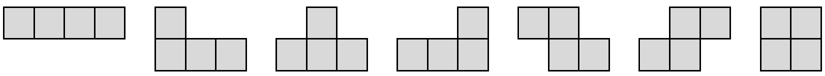
Piezīme. Var iegūt arī vājāku summas $n+m$ novērtējumu. Ievērojam: ja $n^2+m^2=2015$, tad $n-m=n+m=1$, kas nav dažādi skaitļi. Tātad $n^2+m^2\leq 403<441=21^2$. Līdz ar to ne *n*, ne *m* nevar pārsniegt 21, tātad $n+m\leq 42$. Šajā gadījumā papildus jāpārbauda vēl arī tās vērtības, kurām $n+m=31$.

9.2. Pierādīt, ka, izmantojot

a) visas septiņas dotās figūras (skat 1. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri;

b) sešas no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri.

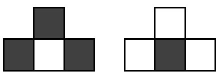
Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt, bet nedrīkst apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.



1. att.

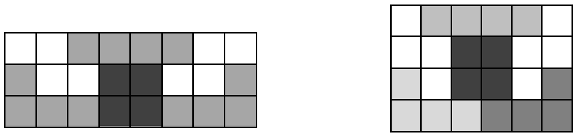
Atrisinājums

a) Visas septiņas dotās figūras kopā satur 28 rūtiņas, tātad taisnstūra laukumam arī jābūt 28 rūtiņām. Vienīgie iespējamie taisnstūra izmēri ir 1×28 (neder), 2×14, 4×7. Izkrāsojot taisnstūrus kā šaha galdiņu, katrā no tiem melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Ja visas dotās figūras izkrāsotu kā šaha galdiņu, tad tās visas, izņemot trešo, saturētu tieši divas katras krāsas rūtiņas. Trešā figūra saturētu trīs vienas krāsas un vienu otras krāsas rūtiņu (skat. A1. att.). Tātad, saskaitot balto un melno rūtiņu skaitu pa visām septiņām figūrām, iegūtu, ka vienas krāsas rūtiņu ir par divām vairāk nekā otras krāsas rūtiņu. Līdz ar to, izmantojot visas septiņas dotās figūras, taisnstūri izveidot nav iespējams.



A1. att.

b) Ja neizmanto trešo figūru, tad taisnstūri ir iespējams izveidot (skat., piemēram, A2. att.).



A2. att.

9.3. Aija izvēlas naturālu skaitli $n \le 100$ un veido skaitļu virkni, kur katru nākamo virknes locekli iegūst pēc šāda likuma:

- ja $2n \le 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n$;
- ja $2n > 100$, tad virknes nākamais loceklis ir $2n - 100$.

Ja virknē vēl kādreiz parādās skaitlis *n*, tad skaitli *n* sauksim par *patīkamu*. Cik pavisam ir *patīkamu* skaitļu, kas nepārsniedz 100?

Piemēram, skaitlis 40 ir *patīkams*, jo <u>40</u>; 80; 60; 20; <u>40</u>; …, bet 25 – nav, jo 25; 50; 100; 100; … (tālāk virknē nav skaitļu, kas atšķirīgi no 100).

Atrisinājums

1. risinājums. Ir 25 skaitļi, kas nepārsniedz 100 un dalās ar 4. Parādīsim, ka visi šie skaitļi ir patīkami. Katrs no tiem pieder vienam no trim cikliem:

100→100;

20→40→80→60→20;

4→8→16→32→64→28→56→12→24→48→96→92→84→68→36→72→44→88→76→52→4.

Pierādīsim, ka tie skaitļi, kas nedalās ar 4, nevar būt patīkami. Šķirojam divus gadījums.

- Nepāra skaitļi nevar būt patīkami, jo visi nākamie virknes locekļi būs tikai pāra skaitļi un, tātad, sākotnējā *n* vērtība tajā atkārtoti parādīties nevar.
- Pāra skaitli, kas nedalās ar 4, var pierakstīt formā $n = 4k + 2$. Šajā gadījumā otrais virknes loceklis būs vai nu $2 \cdot (4k+2) = 4 \cdot (2k+1)$, vai $2 \cdot (4k+2) - 100 = 4 \cdot (2k - 24)$. Abos gadījumos virknes otrais loceklis dalās ar 4 un tas ir uzrakstāms formā $4m$. Visi nākamie virknes locekļi arī dalīsies ar 4, jo vai nu $2 \cdot 4m = 8m$, vai $2 \cdot 4m - 100 = 4 \cdot (2m - 25)$. Līdz ar to virknē nevar atkārtoti parādīties skaitlis, kas nedalās ar 4, un skaitlis $n = 4k + 2$ nav patīkams.

Tātad pavisam ir **25** patīkami skaitļi.

2. risinājums. Ir 25 skaitļi, kas nepārsniedz 100 un dalās ar 4. Parādīsim, ka visi šie skaitļi ir patīkami. Ja skaitlis *x* dalās ar 4, tad gan 2*x*, gan $2x - 100$ arī dalīsies ar 4. Aplūkosim virkni, sākot ar patvaļīgu skaitli x_1, kas dalās ar 4: $x_1, x_2, x_3, ...$ Tā kā ir tikai 25 skaitļi, kas tajā var parādīties, tad skaidrs, ka kādā brīdī virknes locekļi sāks atkārtoties. Aplūkosim pirmo skaitli virknē, kas atkārtojas, tas ir, tādu x_{j+1}, ka visi iepriekšējie $x_1, x_2, ..., x_j$ ir dažādi, bet x_{j+1} ir vienāds ar kādu no tiem. Pierādīsim, ka $x_{j+1} = x_1$, ar to arī būs pierādīts, ka skaitlis x_1 ir patīkams. Pieņemsim pretējo, ka $x_{j+1} = x_{k+1}$ un aplūkosim, kādi varēja būt iepriekšējie skaitļi x_j un x_k. Tā kā tiem jābūt dažādiem, tad skaidrs, ka x_{j+1} un x_{k+1} tika iegūti ar dažādām darbībām, tas ir, $x_{j+1} = 2x_j$ un $x_{k+1} = 2x_k - 100$ (vai otrādi), kas nozīmē, ka $2x_j = 2x_k - 100$ jeb $x_k - x_j = 50$ un tā ir pretruna, jo gan x_j, gan x_k dalās ar 4, bet 50 nedalās ar 4.

Vēl jāpierāda, ka pārējie skaitļi nav patīkami. Skaidrs, ka nepāra skaitļi nav patīkami, jo, ja *x* ir nepāra skaitlis, tad gan 2*x*, gan $2x - 100$ ir pāra skaitļi un tālāk virknē visi skaitļi būs pāra.

Ja skaitlis *x* dalās ar 2, bet nedalās ar 4, tad x nav patīkams, jo, gan 2*x*, gan $2x - 100$ dalās ar 4 un tālāk virknē visi skaitļi dalīsies ar 4.

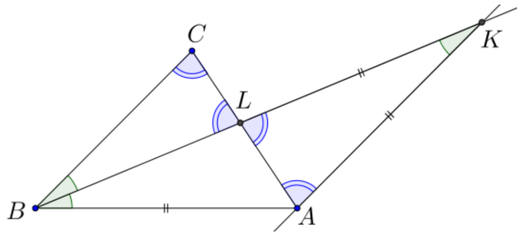
9.4. Trijstūrī *ABC* novilkta bisektrise *BL* (*L* atrodas uz malas *AC*), tā krusto taisni, kas no *A* vilkta paralēli *BC*, punktā *K*. Zināms, ka $LK = AB$. Pierādīt, ka $AB > BC$!

Atrisinājums

Tā kā $\angle LBC = \angle LBA$ pēc bisektrises definīcijas un $\angle LBC = \angle AKB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *BC* un *AK*, tad $\angle LBA = \angle AKB$ un trijstūris *AKB* ir vienādsānu, pie kam $AB = AK$ (skat. A3. att.). Arī trijstūris *AKL* ir vienādsānu, jo pēc dotā un iepriekš iegūtā $LK = AB = AK$. Vienādsānu trijstūrim leņķi pie pamata ir vienādi, tāpēc $\angle ALK = \angle LAK$.

Tā kā $\angle ALK = \angle BLC$ kā krustleņķi un $\angle LAK = \angle ACB$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *BC* un *AK*, tad $\angle BLC = \angle BCL$ un trijstūris *LBC* ir vienādsānu, pie kam $BL = BC$.

No trijstūra nevienādības $AB + AK > BK = BL + LK = BC + AK$ un no tā seko, ka $AB > BC$.



A3. att.

9.5. Kāda ir izteiksmes $a^{20} + a^4 + \dfrac{1}{a^4+1}$ mazākā iespējamā vērtība, ja *a* ir reāls skaitlis?

Atrisinājums

1. risinājums. Dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir 1, to iegūst, ja $a = 0$. Pamatosim, ka mazāku vērtību nevar iegūt.

Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi: $a^{20} + a^4 + \dfrac{1}{a^4+1} = a^{20} + \dfrac{a^8 + a^4 + 1}{a^4+1} = a^{20} + \dfrac{a^8}{a^4+1} + 1$.

Pirmie divi saskaitāmie ir nenegatīvi, tātad šīs izteiksmes vērtība ir vismaz 1.

2. risinājums. Dotās izteiksmes mazākā iespējamā vērtība ir 1, to iegūst, ja $a = 0$. Pamatosim, ka mazāku vērtību nevar iegūt.

Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi: $a^{20} + a^4 + \dfrac{1}{a^4+1} = a^{20} - 1 + (a^4+1) + \dfrac{1}{a^4+1}$.

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$(a^4+1) + \frac{1}{a^4+1} \geq 2 \cdot \sqrt{(a^4+1) \cdot \frac{1}{a^4+1}} = 2.$$

Tā kā $a^{20} \geq 0$, tad iegūstam $a^{20} + a^4 + \dfrac{1}{a^4+1} \geq 0 - 1 + 2 = 1$. Tātad dotās izteiksmes vērtība ir vismaz 1.

10.1. Kvadrātvienādojuma

$$(1+\sqrt{5})x^2 - \sqrt[4]{\frac{7}{3+\sqrt{5}}} \cdot (1+\sqrt{5})^2 x + \sqrt[4]{\frac{7}{3+\sqrt{5}}} = 0$$

saknes ir skaitļi *a* un *b*. Pierādīt, ka izteiksmes $a^4b + ab^4 + 3a^3b^2 + 3a^2b^3$ vērtība ir vesels skaitlis!

Atrisinājums

No Vjeta teorēmas izriet, ka

$$\begin{cases} a+b = \sqrt[4]{\dfrac{7}{3+\sqrt{5}}} \cdot (1+\sqrt{5}) \\ ab = \sqrt[4]{\dfrac{7}{3+\sqrt{5}}} \cdot \dfrac{1}{1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

Pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^4b+ab^4+3a^3b^2+3a^2b^3=ab(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)=ab(a+b)^3=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{7}{3+\sqrt{5}}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{7}{3+\sqrt{5}}\right)^3}\cdot(1+\sqrt{5})^3=\frac{7}{3+\sqrt{5}}\cdot(1+\sqrt{5})^2=$$

$$=\frac{7\cdot(1+2\sqrt{5}+5)}{3+\sqrt{5}}=\frac{7\cdot2\cdot(3+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}}=14.$$

Tā kā skaitlis 14 ir vesels skaitlis, tad prasītais ir pierādīts.

10.2. Pierādīt, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5+5n^4-8n$ dalās ar 10.

Atrisinājums

1. risinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $3+5-8=0$ dalās ar 10.

Induktīvā pieņēmums. Pieņemsim, ja $n=k$, tad $3k^5+5k^4-8k$ dalās ar 10.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ja $n=k+1$, tad $3(k+1)^5+5(k+1)^4-8(k+1)$ dalās ar 10.

Ekvivalenti pārveidojam izteiksmi $3(k+1)^5+5(k+1)^4-8(k+1)$:

$$3(k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)+5(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)-8(k+1)=$$

$$=3k^5+20k^4+50k^3+60k^2+27k=3k^5+5k^4-8k+15k^4+50k^3+60k^2+35k=$$

$$=3k^5+5k^4-8k+5k\cdot(3k^3+10k^2+12k+7).$$

Saskaitāmais $3k^5+5k^4-8k$ dalās ar 10 pēc induktīvā pieņēmuma.

Saskaitāmais $5k\cdot(3k^3+10k^2+12k+7)$ dalās ar 5, jo satur reizinātāju 5, un dalās ar 2, jo

- ja k ir pāra skaitlis, tad reizinātājs k dalās ar 2;
- ja k ir nepāra skaitlis, tad reizinātājs $3k^3+10k^2+12k+7$ ir pāra skaitlis un tas dalās ar 2.

Tā kā izteiksme $3(k+1)^5+5(k+1)^4-8(k+1)$ dalās gan ar 2, gan ar 5, tad tā dalās arī ar 10 un līdz ar to esam pierādījuši, ka $3(k+1)^5+5(k+1)^4-8(k+1)$ dalās ar 10.

No matemātiskās indukcijas principa izriet, ka katram naturālam n izteiksme $3n^5+5n^4-8n$ dalās ar 10, kas arī bija jāpierāda.

2. risinājums. Pārveidojam doto izteiksmi:

$$3n^5+5n^4-8n=n\,(3n^4-3n^3+8n^3-8)=n\,(3n^3(n-1)+8\,(n^3-1))=$$

$$=n\,(3n^3(n-1)+8\,(n-1)(n^2+n+1))=n\,(n-1)\,(3n^3+8(n^2+n+1))$$

Viens no reizinātājiem n vai $n-1$ ir pāra skaitlis, tāpēc noteikti dotā izteiksme dalās ar 2. Vēl jāpierāda, ka dotā izteiksme dalās ar 5.

Skaitli n dalot ar 5, iespējamas piecas dažādas atlikumu vērtības: 0, 1, 2, 3, 4. Apskatām visus gadījumus:

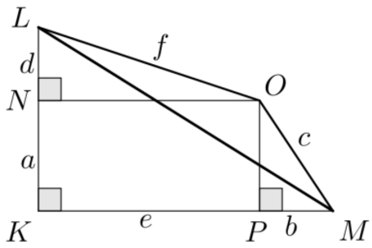
- $n=5k$, tad reizinātājs n dalās ar 5;
- $n=5k+1$, tad reizinātājs $n-1$ dalās ar 5;
- $n=5k+2$ jeb $n\equiv 2\pmod 5$, tad
$$3n^3+8\cdot(n^2+n+1)\equiv 3\cdot8+8\cdot(4+2+1)\equiv 4+1\equiv 0\pmod 5;$$
- $n=5k+3$ jeb $n\equiv 3\pmod 5$, tad
$$3n^3+8\cdot(n^2+n+1)\equiv 3\cdot27+8\cdot(9+3+1)\equiv 1+4\equiv 0\pmod 5;$$
- $n=5k+4$ jeb $n\equiv 4\pmod 5$, tad
$$3n^3+8\cdot(n^2+n+1)\equiv 3\cdot64+8\cdot(16+4+1)\equiv 2+3\equiv 0\pmod 5.$$

Esam ieguvuši, ka visos gadījumos dotā izteiksme dalās gan ar 2, gan ar 5, tātad tā dalās ar 10.

10.3. Pozitīviem skaitļiem *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* ir spēkā sakarības $a^2+b^2=c^2$ un $d^2+e^2=f^2$. Pierādīt, ka $(a+d)^2+(b+e)^2\le(c+f)^2$.

Atrisinājums

1. risinājums. Tā kā visi dotie skaitļi ir pozitīvi, varam tos uztvert kā nogriežņu garumus. Apskatām taisnleņķa trijstūri *KLM* ar katešu garumiem $KL=a+d$ un $KM=e+b$ (skat. A4. att.). Novelkam nogriežņus $NO\parallel KM$ un $OP\parallel KL$ tā, ka $KN=OP=a$ un $KP=NO=e$. No dotajām sakarībām un Pitagora teorēmas trijstūros *OPM* un *LNO*, iegūstam, ka $OM=c$ un $LO=f$.



A4. att.

Aprēķinām trijstūra *KLM* hipotenūzas garumu: $LM=\sqrt{(a+d)^2+(b+e)^2}$. No trijstūra nevienādības trijstūrī *LMO* izriet, ka $\sqrt{(a+d)^2+(b+e)^2}\le c+f$. Tā kā abas nevienādības puses ir pozitīvas, tad, kāpinot kvadrātā, iegūst $(a+d)^2+(b+e)^2\le(c+f)^2$, kas arī bija jāpierāda.

2. risinājums. Aplūkojam vektorus $\vec{x}=(a;b)$ un $\vec{y}=(d;e)$, tad

$$|\vec{x}|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{c^2}=c \text{ un } |\vec{y}|=\sqrt{d^2+e^2}=\sqrt{f^2}=f;$$

$$\vec{x}+\vec{y}=(a+d;b+e) \text{ un } |\vec{x}+\vec{y}|=\sqrt{(a+d)^2+(b+e)^2}.$$

Tad izteiksmi $(a+d)^2+(b+e)^2\le(c+f)^2$ var pārrakstīt $|\vec{x}+\vec{y}|^2\le(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2$, kas ir patiesa, jo jebkuriem diviem vektoriem $|\vec{x}+\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

10.4. Pierādīt, ka regulāram desmitstūrim $A_1A_2...A_{10}$ ir spēkā sakarība $A_1A_2+R=A_1A_4$, kur *R* ir tam apvilktās riņķa līnijas rādiuss!

Atrisinājums

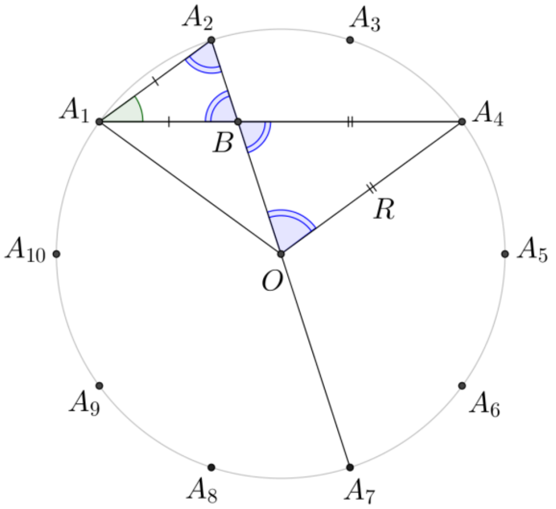
1. risinājums. Regulāram desmitstūrim $A_1A_2...A_{10}$ apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar *O* (skat. A5. att.). Regulāra desmitstūra katra mala savelk $360°:10=36°$ lielu loku. Tad $\angle A_1A_2A_7=\frac{1}{2}\cup A_1A_9A_7=72°$ un $\angle A_2A_1A_4=\frac{1}{2}\cup A_2A_3A_4=36°$ kā ievilktie leņķi un $\angle A_2OA_4=\cup A_2A_3A_4=72°$ kā centra leņķis. No ΔA_1A_2B iegūstam, ka $\angle A_1BA_2=180°-36°-72°=72°$.

Ievērojam, ka $\angle OBA_4=\angle A_1BA_2=72°$ kā krustleņķi. Tātad ΔA_1A_2B un ΔOA_4B ir vienādsānu, jo leņķi pie pamata ir vienādi, līdz ar to $A_1A_2=A_1B$ un $BA_4=OA_4=R$. Tad $A_1A_2+R=A_1B+BA_4=A_1A_4$, kas arī bija jāpierāda.

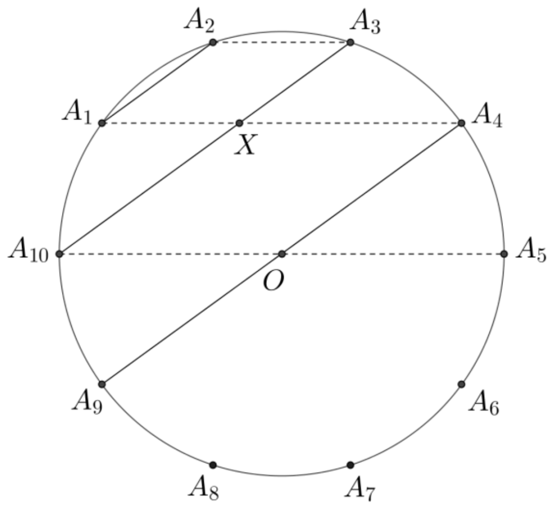
2. risinājums. Regulāram desmitstūrim $A_1A_2...A_{10}$ apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar *O* (skat. A6. att.). Regulāra desmitstūra visas malas savelk vienāda lieluma lokus. Diagonāles A_1A_2, A_3A_{10} un A_4A_9 ir savā starpā paralēlas, jo starp paralēlām hordām ir vienādi loki. Līdzīgi paralēlas ir arī diagonāles A_2A_3, A_1A_4 un A_5A_{10}, pie kam $A_3A_{10}=A_1A_4$, jo vienādus lokus savelk vienādas hordas.

Nogriežņi A_4A_9 un A_5A_{10} ir diametri. Nogriežņu A_1A_4 un A_3A_{10} krustpunktu apzīmējam ar *X*. Četrstūri $A_1A_2A_3X$ un $A_{10}XA_4O$ ir paralelogrami, jo to pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Tātad

$A_1A_2 = XA_3$ un $OA_4 = XA_{10} = R$. Tātad $A_1A_2 + OA_4 = A_3A_{10}$ jeb $A_1A_2 + R = A_1A_4$, kas arī bija jāpierāda.



A5. att.

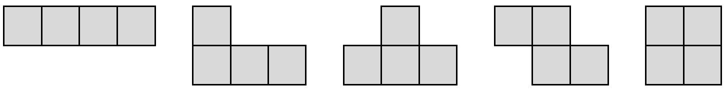


A6. att.

10.5. **a)** Pierādīt, ka, izmantojot visas piecas dotās figūras (skat. 2. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri!

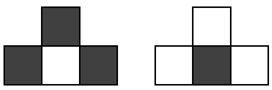
b) Vai, izmantojot četras no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri?

Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt vai apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.


2. att.

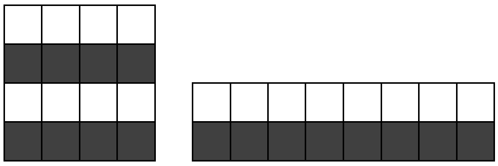
Atrisinājums

a) Visas piecas dotās figūras kopā satur 20 rūtiņas, tātad taisnstūra laukumam arī jābūt 20 rūtiņām. Vienīgie iespējamie taisnstūra izmēri ir 1×20 (neder), 2×10, 4×5. Izkrāsojot taisnstūrus kā šaha galdiņu, katrā no tiem melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Ja visas dotās figūras izkrāsotu kā šaha galdiņu, tad tās visas, izņemot trešo, saturētu tieši divas katras krāsas rūtiņas. Trešā figūra saturētu trīs vienas krāsas un vienu otras krāsas rūtiņu (skat. A7. att.). Tātad, saskaitot balto un melno rūtiņu skaitu pa visām piecām figūrām, iegūtu, ka vienas krāsas rūtiņu ir par divām vairāk kā otras krāsas rūtiņu. Līdz ar to, izmantojot visas piecas dotās figūras, taisnstūri izveidot nav iespējams.

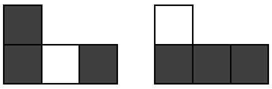

A7. att.

b) Četras no dotajām figūrām kopā satur 16 rūtiņas, tātad taisnstūra laukumam arī jābūt 16 rūtiņām. Vienīgie iespējamie taisnstūra izmēri ir 1×16 (neder), 2×8, 4×4. Spriežot līdzīgi kā a) gadījumā, secinām, ka nevar izmantot A7. att. redzamo figūru. Apskatīsim atlikušās četras figūras.

Izkrāsosim taisnstūrus joslās (skat. A8. att.).


A8. att.

Ievērojam, ka katrā taisnstūrī melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds. Ja arī figūras izkrāsotu joslās, tad tās visas, izņemot otro, saturētu tieši divas katras krāsas rūtiņas. Otrā figūra saturētu trīs vienas krāsas un vienu otras krāsas rūtiņu (skat. A9. att.). Tātad, saskaitot balto un melno rūtiņu skaitu pa visām četrām figūrām, iegūtu, ka vienas krāsas rūtiņu ir par divām vairāk kā otras krāsas rūtiņu. Līdz ar to, izmantojot četras no dotajām figūrām, taisnstūri izveidot nav iespējams.



A9. att.

11.1. Kvadrātvienādojuma

$$(1+\sqrt{5})x^2 - \sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5})^2 x + \sqrt[4]{7} = 0$$

saknes ir skaitļi a un b. Pierādīt, ka izteiksmes $a^4b + ab^4 + 3a^3b^2 + 3a^2b^3 + 16a^4b^3 + 16a^3b^4$ vērtība ir vesels skaitlis!

Atrisinājums

No Vjeta teorēmas izriet, ka

$$\begin{cases} a+b = \sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5}) \\ ab = \dfrac{\sqrt[4]{7}}{1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

Pārveidojam doto izteiksmi:

$$a^4b + ab^4 + 3a^3b^2 + 3a^2b^3 + 16a^4b^3 + 16a^3b^4 = ab(a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 16a^3b^2 + 16a^2b^3) =$$

$$= ab((a+b)^3 + 16a^2b^2(a+b)) = \frac{\sqrt[4]{7}}{1+\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[4]{7^3}\cdot(1+\sqrt{5})^3 + 16\cdot\frac{\sqrt[4]{7^2}\cdot\sqrt[4]{7}\cdot(1+\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})^2}\right) =$$

$$= 7\cdot(1+\sqrt{5})^2 + \frac{16\cdot 7}{(1+\sqrt{5})^2} = 7\cdot\left((6+2\sqrt{5}) + \frac{16}{6+2\sqrt{5}}\right) =$$

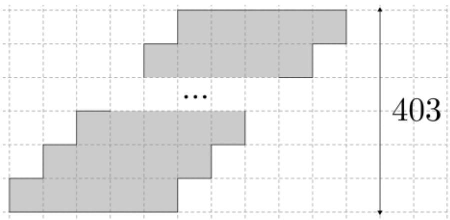
$$= 7\cdot\frac{36+24\sqrt{5}+20+16}{6+2\sqrt{5}} = 7\cdot 12\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = 84.$$

Tā kā skaitlis 84 ir vesels skaitlis, tad prasītais ir pierādīts.

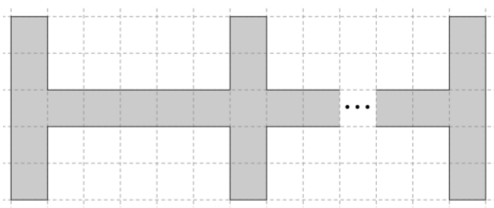
11.2. Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 1612-stūri, kura laukums ir 2015 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām?

Atrisinājums

Jā, šādu daudzstūri var uzzīmēt (skat., piemēram, A10. att.).



A10. att.



A11. att.

Figūras būvēšanai izmantoti 403 taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas. Tātad iegūtā daudzstūra laukums ir $5\cdot403=2015$ rūtiņas. Tā kā katrs taisnstūris satur tieši četras iegūtā daudzstūra malas, tad uzzīmēts ir $4\cdot403=1612$-stūris.

Piezīme. Daudzstūri var uzzīmēt arī, piemēram, kā A11. att.

11.3. Pirātam Džonam Silveram kajītē ir 38 papagaiļi un 39 papagaiļu krātiņi. Katram papagailim ir savs krātiņš un vēl viens krātiņš stāv tukšs. Kādu dienu vētras laikā tie visi izmuka, tika noķerti un uz ātru roku salikti atpakaļ krātiņos (katrā krātiņā ne vairāk kā viens), bet ne obligāti savos. Vienā gājienā Džons Silvers var paņemt vienu papagaili un pārlikt uz to krātiņu, kurš dotajā brīdī ir tukšs. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru viņam noteikti pietiek, lai panāktu, ka visi papagaiļi atrodas savos sākotnējos krātiņos?

Atrisinājums

Apzīmēsim papagaiļus ar numuriem no 1 līdz 38 un krātiņus ar numuriem no 1 līdz 39 tā, ka sākotnēji papagaiļa numurs sakrīt ar krātiņa numuru. Vienkāršības dēļ tukšajā vietā sākumā ieliksim iedomātu papagaili ar numuru 39. Ņemsim patvaļīgu papagaili a_1, kas neatrodas savā krātiņā, pieņemsim, ka tas atrodas krātiņā a_2. Tad a_2 arī neatrodas savā vietā un atrodas kādā vietā a_3, utt, līdz papagailis a_n atrodas vietā a_1 ($2 \le n \le 39$). Tādā veidā visi papagaiļi sadalās ciklos. Ja ciklā ir *n* papagaiļi, tad šī cikla sakārtošanai nepieciešams tieši

a) $n-1$ gājiens, ja tajā ietilpst tukšais krātiņš. Tad tur ir $n-1$ papagailis un ar katru gājienu ne vairāk kā vienu var ielikt savā krātiņā, tātad mazāk gājienu nevar būt. Ar $n-1$ gājienu pietiek, jo vienmēr būs kāds papagailis, kuru ielikt savā vietā;

b) $n+1$ gājiens, ja tajā neietilpst tukšais krātiņš. Ar pirmo gājienu nevienu papagaili nevar ielikt savā vietā un ar katru nākamo gājienu ne vairāk kā vienu papagaili var ielikt savā vietā, tāpēc mazāk būt nevar. Pirmajā gājienā jebkuru papagaili pārceļ uz tukšo krātiņu, atlikušos $n-1$ sakārto kā a) gadījumā ar $n-1$ gājienu un pēdējā gājienā ieceļ savā vietā to, kuru pārcēla pirmo.

Tātad kopējais nepieciešamais gājienu skaits ir

- papagaiļu skaits + ciklu skaits, ja nevienā ciklā neietilpst tukšais krātiņš
- papagaiļu skaits + ciklu skaits – 1, ja kādā ciklā ietilpst tukšais krātiņš.

Redzams, ka maksimālais gājienu skaits būs nepieciešams tad, kad ciklu skaits ir maksimālais un nevienā ciklā neietilpst tukšais krātiņš. Minimālais papagaiļu skaits ciklā ir 2, tāpēc maksimālais ciklu skaits ir $38:2=19$, tātad maksimālais gājienu skaits, kāds var būt nepieciešams, ir $38+19=57$ gājieni. Redzam: ja papagaiļus samaina vietām pa pāriem, tad tieši tik daudz gājieni arī ir vajadzīgi.

11.4. Naturāli skaitļi *a*, *b* un *c* ir savstarpēji pirmskaitļi un visi ir lielāki nekā 50. Zināms, ka $a+b$ dalās ar *c* un $b+c$ dalās ar *a*. Atrast mazāko iespējamo *b* vērtību!

Atrisinājums

Mazākā iespējamā *b* vērtība ir 2549. Pierādīsim, ka mazāku *b* vērtību nav iespējams atrast.

Skaitlis $a+b+c$ dalās gan ar *a* gan ar *c*, tātad $a+b+c$ dalās ar *ac* (jo tie ir savstarpēji pirmskaitļi). Tātad $a+b+c \ge ac$ jeb $b \ge ac-a-c = ac-a-c+1-1=(a-1)(c-1)-1$. Līdz ar to mazākā *b* vērtība ir gadījumā, ja $a=51$ un $c=52$ (vai otrādi), t. i., $b=50\cdot 51-1=2549$. Skaitļi 51, 2549, 52 apmierina dotos nosacījumus.

11.5. Pierādīt, ka regulāram četrpadsmitstūrim $A_1A_2...A_{14}$ ir spēkā sakarība $A_1A_2+A_1A_6=A_1A_4+R$, kur *R* ir tam apvilktās riņķa līnijas rādiuss!

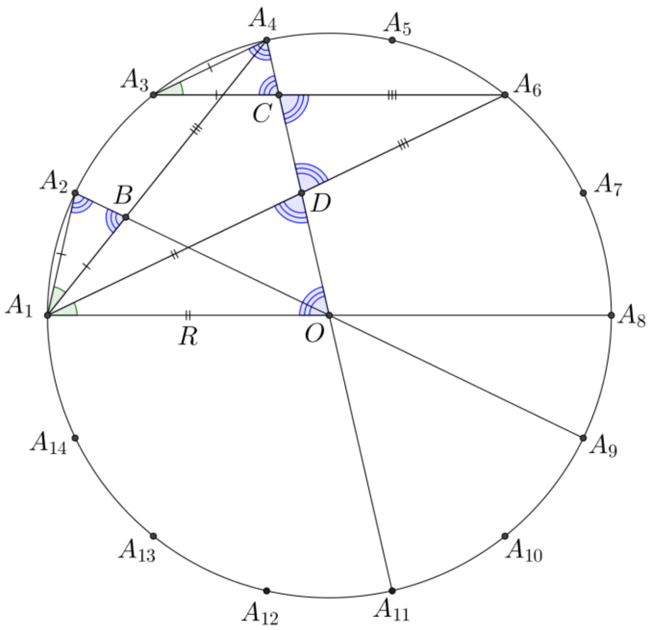
Atrisinājums

1. risinājums. Regulāram četrpadsmitstūrim $A_1A_2...A_{14}$ apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar *O* (skat. A12. att.). Regulāra četrpadsmitstūra katras malas savilkto loku apzīmējam ar $\alpha = 360° : 14$.

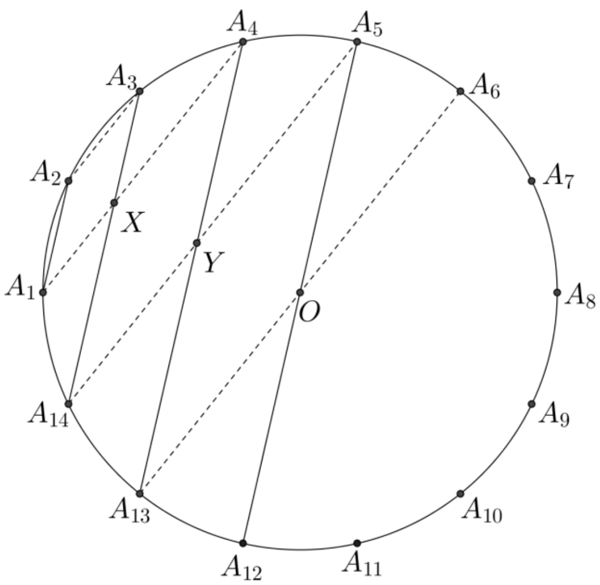
Tad $\angle A_2A_1A_4 = \angle A_4A_3A_6 = \angle A_6A_1A_8 = \alpha$ un $\angle A_1A_2A_9 = \angle A_3A_4A_{11} = 3\alpha$ kā ievilktie leņķi un $\angle A_1OA_4 = 3\alpha$ kā centra leņķis.

Ievērojam, ka $180° = 7\alpha$. No ΔA_1A_2B iegūstam, ka $\angle A_1BA_2 = 7\alpha - \alpha - 3\alpha = 3\alpha$, līdzīgi no ΔA_3A_4C iegūst $\angle A_3CA_4 = 3\alpha$ un no ΔA_1OD iegūst $\angle A_1DO = 3\alpha$. Ievērojam, ka $\angle A_1DO = \angle A_6DC = 3\alpha$ un $\angle A_3CA_4 = \angle DCA_6 = 3\alpha$ kā krustleņķi. Tātad ΔA_1A_2B, ΔA_3A_4C, ΔOA_1D un ΔA_6CD ir vienādsānu, jo leņķi pie pamata ir vienādi. Līdz ar to $A_1B = A_1A_2 = A_3A_4 = A_3C$ un $A_1O = A_1D = R$, un $A_6D = A_6C$.

Tad $A_1A_2 + A_1A_6 = A_1B + A_1D + DA_6 = A_3C + R + CA_6 = A_3A_6 + R = A_1A_4 + R$, kas arī bija jāpierāda.



A12. att.



A13. att.

2. risinājums. Regulāram četrpadsmitstūrim $A_1A_2...A_{14}$ apvilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar O (skat. A13. att.). Regulāra četrpadsmitstūra visas malas savelk vienāda lieluma lokus. Diagonāles A_1A_2, A_3A_{14}, A_4A_{13} un A_5A_{12} ir savā starpā paralēlas, jo starp paralēlām hordām ir vienādi loki. Līdzīgi paralēlas ir arī diagonāles A_2A_3, A_1A_4, A_5A_{14} un A_6A_{13}, pie kam $A_3A_{14} = A_1A_4$ un $A_4A_{13} = A_5A_{14}$, jo vienādus lokus savelk vienādas hordas.

Nogriežņi A_5A_{12} un A_6A_{13} ir diametri. Nogriežņu A_1A_4 un A_5A_{14} krustpunktu apzīmēsim ar Y. Četrstūris XA_4YA_{14} ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Tātad $A_1A_2 = XA_3$ un $XA_{14} = A_3A_{14} - A_1A_2 = A_1A_4 - A_1A_2$.

Nogriežņu A_4A_{13} un A_3A_{14} krustpunktu apzīmēsim ar X. Četrstūris $A_1A_2A_3X$ ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Tātad $A_4Y = A_{14}X$ un $YA_{13} = A_4A_{13} - XA_{14} = A_1A_6 - A_1A_4 + A_1A_2$.

Četrstūris $A_{13}YA_5O$ arī ir paralelograms un $OA_5 = YA_{13} = R$. Tātad $A_1A_6 - A_1A_4 + A_1A_2 = R$ jeb $A_1A_2 + A_1A_6 = A_1A_4 + R$, kas arī bija jāpierāda.

12.1. Zināms, ka $\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{1}{2015}$. Aprēķināt $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$ vērtību!

Atrisinājums

1. risinājums. Aplūkosim starpību

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = 2.$$

Tātad $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 2 + \dfrac{1}{2015} = \dfrac{4031}{2015}$.

2. risinājums. Pārveidojam doto sakarību:

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\cos(2x + x)}{\cos x} = \frac{\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x \cos x - 2\sin^2 x \cos x}{\cos x} =$$

$$= \cos 2x - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x = \frac{1}{2015}.$$

Izsakot, iegūstam $4\sin^2 x = \frac{2014}{2015}$. Aprēķināsim $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ vērtību:

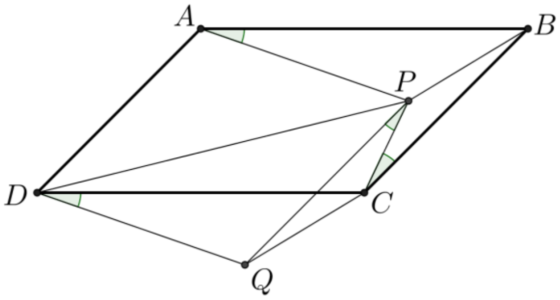
$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{\sin(2x+x)}{\sin x} = \frac{\sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x}{\sin x} = \frac{2\sin x\cos^2 x + \cos 2x\sin x}{\sin x} =$$

$$= 2\cos^2 x + \cos 2x = 2(1-\sin^2 x) + (1-2\sin^2 x) = 3 - 4\sin^2 x = 3 - \frac{2014}{2015} = \frac{4031}{2015}.$$

12.2. Paralelograma *ABCD* iekšpusē atzīmēts punkts *P* tā, ka $\angle PAB = \angle PCB$. Pierādīt, ka $\angle PBC = \angle PDC$!

Atrisinājums

Apzīmējam $\angle PAB = \angle PCB = \alpha$. No virsotnes *D* velk nogriezni *DQ*, kas paralēls *AP*, bet no *C* – nogriezni *CQ*, kas paralēls *BP* (skat. A14. att.). Trijstūri *ABP* un *DCQ* ir vienādi pēc pazīmes $\ell m\ell$ un to attiecīgie elementi ir vienādi, t. i., $PB = QC$ un $\angle PAB = \angle QDC = \alpha$. Tad *PBCQ* ir paralelograms, jo $PB = QC$ un $PB \parallel QC$. Līdz ar to $\angle CPQ = \angle PCB = \alpha$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm *PQ* un *BC*. Ap četrstūri *DPCQ* var apvilkt riņķa līniju, jo vienādi leņķi $\angle CPQ$ un $\angle CDQ$ balstās uz *CQ*. Tātad $\angle PDC = \angle PQC$, jo abi ir ievilkti leņķi, kas balstās uz hordas *PC*. Paralelograma *PBCQ* pretējie leņķi ir vienādi: $\angle PBC = \angle PQC$. Tātad $\angle PBC = \angle PDC$.



A14. att.

12.3. Pierādīt, ka jebkuram naturālam nepāra skaitlim *n* izteiksme $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalās ar 2015.

Atrisinājums

1. risinājums. Ievērojam, ka $2015 = 5\cdot 13\cdot 31$. Tā kā visi pirmreizinātāji ir dažādi, nepieciešams pierādīt, ka dotā izteiksme vienlaikus dalās gan ar 5, gan ar 13, gan 31.

Izmantosim teorēmu: ja veseli skaitļi *A* un *B*, dalot ar *n*, dod attiecīgi atlikumus *a* un *b*, tad dalot ar *n* skaitļus $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$ rodas tādi paši atlikumi, kādus dod $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$ dalot ar *n*.

Apskatām dotās izteiksmes dalāmību ar katru pirmreizinātāju.

- Atlikums, kāds rodas, izteiksmi $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalot ar 5, ir $4^n + 1^n + 4^n - 4^n$ jeb $4^n + 1$. Tā kā *n* ir nepāra skaitlis, tad $4^n + 1 = 4^{2k+1} + 1 = 4\cdot 16^k + 1$. No tā, ka 16, dalot ar 5 dod atlikumu 1, iegūst, ka $4\cdot 16^k + 1$ dalot ar 5, dod atlikumu $4\cdot 1^k + 1 = 5$ jeb dalās ar 5. Tātad arī izteiksme $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalās ar 5.
- Atlikums, kāds rodas, izteiksmi $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalot ar 13, ir $7^n + 6^n + 11^n - 11^n$ jeb $7^n + 6^n = 7^{2k+1} + 6^{2k+1} = 7\cdot 49^k + 6\cdot 36^k$. No tā, ka 49 un 36, dalot ar 13, abi dod atlikumu 10, iegūst, ka $7\cdot 49^k + 6\cdot 36^k$, dalot ar 13, dod atlikumu $7\cdot 10^k + 6\cdot 10^k = 13\cdot 10^k$ jeb dalās ar 13. Tātad arī izteiksme $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalās ar 13.
- Atlikums, kāds rodas, izteiksmi $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalot ar 31, ir $6^n + 12^n + 25^n - 12^n$ jeb $6^n + 25^n = 6^{2k+1} + 25^{2k+1} = 6\cdot 36^k + 25\cdot 625^k$. No tā, ka 36 un 625, dalot ar 31, abi dod atlikumu 5, iegūst, ka $6\cdot 36^k + 25\cdot 625^k$, dalot ar 31, dod atlikumu $6\cdot 5^k + 25\cdot 5^k = 31\cdot 5^k$ jeb dalās ar 31. Tātad arī izteiksme $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$ dalās ar 31.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotā izteiksme vienlaikus dalās ar 5, 13 un 31, tātad tā dalās ar 2015.

2. risinājums. Ievērojam, ka $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Tā kā visi pirmreizinātāji ir dažādi, nepieciešams pierādīt, ka dotā izteiksme vienlaikus dalās gan ar 5, gan ar 13, gan 31.
Apskatām dotās izteiksmes dalāmību ar katru pirmreizinātāju:

- $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n \equiv 4^n + 1^n + 4^n - 4^n \equiv 4^n + 1^n \equiv (-1)^{2k+1} + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$;
- $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n \equiv 7^n + 6^n + 11^n - 11^n \equiv 7^n + 6^n \equiv (-6)^{2k+1} + 6^{2k+1} \equiv 0 \pmod{13}$;
- $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n \equiv 6^n + 12^n + 25^n - 12^n \equiv 6^n + 25^n \equiv 6^{2k+1} + (-6)^{2k+1} \equiv 0 \pmod{31}$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka dotā izteiksme vienlaikus dalās ar 5, 13 un 31, tātad tā dalās ar 2015.

12.4. Katrs no skaitļu ass punktiem ar veselu koordinātu ir nokrāsots vai nu baltā, vai melnā krāsā. Nekādi divi balti punkti neatrodas viens no otra attālumā 1 un nekādi divi melni punkti neatrodas viens no otra attālumā *d*. Noteikt, kādām naturālām *d* vērtībām šāds krāsojums ir iespējams!

Atrisinājums

Šāds krāsojums iespējams tikai tad, ja *d* – nepāra skaitlis. Tad der krāsojums, kur punkti nokrāsoti pamīšus baltā un melnā krāsā (skat. A15. att.).

A15. att.

Skaidrs, ka divi baltie punkti nevar atrasties blakus. Ja divi melnie punkti atrodas blakus (piemēram, pozīcijās 1 un 2), tad *d* vienības tālāk (pozīcijās $d+1$ un $d+2$) atrodas divi baltie punkti, kas nav iespējams pēc uzdevuma nosacījumiem. Tātad punktiem jābūt izkrāsotiem pamīšus. Redzams, ka pamīšus izvietojot punktus, uzdevuma nosacījumi tiek apmierināti, ja *d* ir nepāra skaitlis, bet, ja *d* ir pāra skaitlis, tad ne.

12.5. Votivapu valodā visi vārdi sastāv tikai no diviem burtiem *a* un *b*. Jebkuru vārdu var iegūt no vārda "*a*", atkārtoti lietojot šādus trīs likumus:

1) pierakstot vārdam galā burtu *b*;
2) pierakstot vārdam galā sevi pašu;
3) aizstājot vārdā trīs pēc kārtas esošus burtus *a* ar vienu burtu *b*.
4)

Vai votivapu valodā ir vārdi **a)** *abbababab*; **b)** *baabaabaa*?

Atrisinājums

a) Vārdu "*abbababab*" var iegūt šādi:

$$a \xrightarrow{2)} aa \xrightarrow{2)} aaaa \xrightarrow{2)} aaaaaaaa \xrightarrow{2)} aaaaaaaaaaaaaaaa \xrightarrow{3)} abaaaaaaaaaaaa \xrightarrow{3)}$$

$$\xrightarrow{3)} abbaaaaaaaaa \xrightarrow{3)} abbabaaaaa \xrightarrow{3)} abbababa \xrightarrow{1)} abbababab$$

b) Vārdu "*baabaabaa*" nevar iegūt. Burtu *a* aizstājam ar ciparu 1, bet burtu *b* – ar ciparu 3. Tad visi vārdi votivapu valodā tiek aizstāti ar naturāliem skaitļiem, kuru pierakstā izmantoti tikai cipari 1 un 3.

Ievērojam, ka sākotnējais vārds "*a*" jeb skaitlis 1 nedalās ar 3.

Pierādīsim, ja kāds skaitlis nedalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar uzdevumā dotajām darbībām, arī nedalās ar 3:

1) ja skaitlis nedalās ar 3, tad, pierakstot tam galā 3, arī iegūtais skaitlis nedalās ar 3, jo ciparu summas atlikums, dalot ar 3, nemainās;
2) ja skaitļa ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad iegūtā skaitļa ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu 2; ja skaitļa ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad iegūtā skaitļa ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu 1; abos gadījumos iegūtais skaitlis nedalās ar 3;
3) skaitļa ciparu summa nemainās, aizstājot 111 ar 3, tātad iegūtais skaitlis nedalās ar 3.

Aizstājot vārda "*baabaabaa*" burtus ar cipariem, iegūst skaitli 311311311, kas dalās ar 3, jo tā ciparu summa ir 15. Tātad, vairākkārt izmantojot dotos likumus, šo vārdu nav iespējams iegūt.