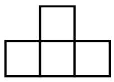
INVARIANTU METODE – KRĀSOŠANA

Teorija un piemēri, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei

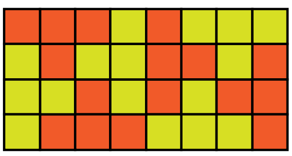
Invariantu metodi var izmantot arī uzdevumos par figūru sagriešanu vai salikšanu. Šādos gadījumos bieži tiek izmantota iekrāsošana.
Pats galvenais šāda tipa uzdevumos ir atrast tādu iekrāsošanas veidu, lai rastos pretruna – iekrāsoto rūtiņu skaits lielajā figūrā atšķirtos no kopējā iekrāsoto rūtiņu skaita mazajās figūrās.
Rūtiņas var iekrāsot dažādi. Visbiežāk tiek lietota iekrāsošana kā šaha galdiņam, taču rūtiņas pēc nepieciešamības var iekrāsot arī, piemēram, joslās, diagonālēs vai vispār atrast kādu citu iekrāsošanas veidu.
Arī šī mācību gada Sagatavošanās olimpiādē (http://nms.lu.lv/olimpiades/valsts/m-g/) katras klašu grupas uzdevumu komplektā viens uzdevums bija saistīts ar iekrāsošanu un tās izmantošanu.

1. piemērs
Vai taisnstūri ar izmēriem a) 5×6, b) 4×8, c) 4×11 rūtiņas var noklāt ar 1. att. dotajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.

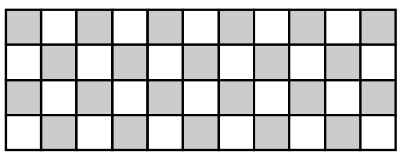


1. att.

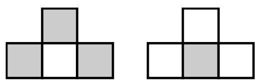
Atrisinājums
a) Nē, nevar. Ievērojam, ka katra mazā figūra satur 4 rūtiņas. Dotajā 5×6 rūtiņu taisnstūrī kopā ir 30 rūtiņas. Tā kā 30 nedalās ar 4, tad taisnstūri nevar noklāt.
b) Jā, var, skat. 2. att.
c) Nē, nevar. Taisnstūrī kopā ir 44 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 4 rūtiņas. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, taisnstūris būtu noklāts ar tieši 11 figūrām. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā (skat. 3. att.); pavisam melnā krāsā ir nokrāsotas 22 (pāra skaits) rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietota dotā figūra, tā noklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas (skat. 4. att.), tātad nepāra skaita melnas rūtiņas. Tāpēc arī 11 (nepāra skaitlis) šādas figūras kopā var noklāt tikai nepāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, tad taisnstūri pilnībā pārklāt nevar.



2. att.



3. att.



4. att.

Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var…?”, „Vai iespējams…?” un atbilde ir

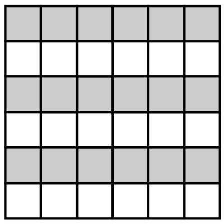
- „JĀ”, tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- „NĒ”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

2. piemērs

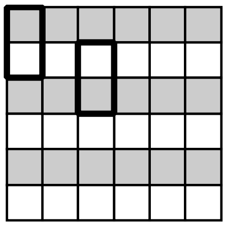
Vai kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas var pārklāt ar 18 domino kauliņiem tā, lai 13 kauliņi atrastos horizontāli, bet 5 – vertikāli? Katrs kauliņš pārklāj tieši 2 rūtiņas, kauliņi nedrīkst pārklāties.

Atrisinājums

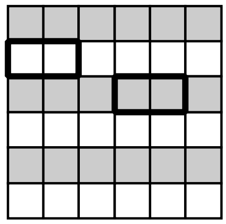
Nē, prasīto nevar izdarīt. Iekrāsosim doto kvadrātu joslās (skat. 5. att.). Tad kvadrātā ir 18 melnas un 18 baltas rūtiņas.



5. att.



6. att.

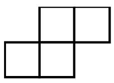


7. att.

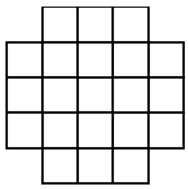
Vispirms izvietosim 5 vertikālos kauliņus. Lai kur katru no tiem novietotu, vienmēr tiks noklātas divas blakus rindu rūtiņas, tātad viena melna, viena balta (skat. 6. att.). Pēc piecu vertikālo kauliņu novietošanas būs noklātas 5 melnas un 5 baltas rūtiņas. Nenoklātas paliek 13 melnas un 13 baltas rūtiņas. Ar vienu horizontālu kauliņu var noklāt vai nu 2 baltas, vai 2 melnas rūtiņas, tas ir, pāra skaita melnas vai pāra skaita baltas (skat. 7. att.). Tātad ar 13 horizontālajiem kauliņiem var noklāt tikai pāra skaita melnas un pāra skaita baltas rūtiņas. Iegūta pretruna, jo pēc vertikālo kauliņu novietošanas vēl ir jānoklāj nepāra skaits melnās un nepāra skaits baltās rūtiņas.

3. piemērs

Kādu lielāko skaitu 8. att. doto figūru var izgriezt no 9. att. dotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 8. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



8. att.

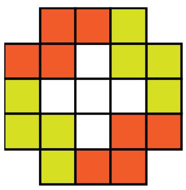


9. att.

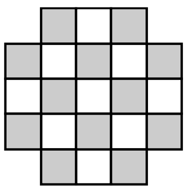
Atrisinājums

Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 4, skat. 10. att.

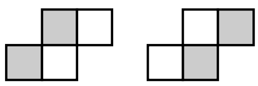
Pierādīsim, ka vairāk figūru nevar izgriezt. Izkrāsosim 9. att. figūru kā šaha galdiņu (skat. 11. att.). Lai kā novietotu 8. att. figūru, tā vienmēr noklāj tieši divas baltas un tieši divas melnas rūtiņas (skat. 12. att.). Tā kā 11. att. figūra satur tieši deviņas baltas rūtiņas, tad no tās var izgriezt ne vairāk kā četras figūras, jo $9:2=4,\ atl.1$.



10. att.



11. att.



12. att.

Iegaumē!

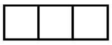
Ja uzdevumā ir jautājums „Kāds ir lielākais…?”, „Kāds ir mazākais …?”, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

1) atrast šo vislielāko (vismazāko) vērtību un parādīt piemēru;
2) pierādīt, ka lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.

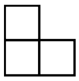
Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 9.-12. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

4. piemērs

Vai kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas var noklāt ar 26 figūrām, kādas dotas 13. att., un vienu 14. att. doto figūru? Kvadrātam jābūt pilnībā noklātam. Figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt.



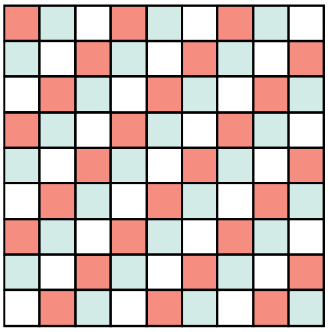
13. att.



14. att.

Atrisinājums

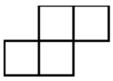
Nē, prasīto nevar izdarīt. Izkrāsosim kvadrātu trīs krāsās *diagonālveidā* (skat. 15. att.) tā, lai novietotā 14. att. figūra saturētu tieši divas vienas krāsas rūtiņas. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka tā satur divas zilas un vienu sarkanu rūtiņu. Tādā gadījumā nenoklātas paliek 25 zilas, 26 sarkanas un 27 baltas rūtiņas, jo kvadrātā katras krāsas rūtiņu skaits ir 27. Katra 13. att. figūra noklāj vienu sarkanu, vienu zilu un vienu baltu rūtiņu. Tā kā nenoklātajā daļā dažādo krāsu rūtiņu skaits nav vienāds, tad ar 13. att. figūrām to noklāt nav iespējams.



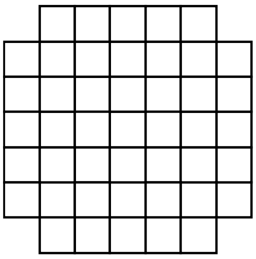
15. att.

5. piemērs

Kādu lielāko skaitu 16. att. doto figūru var izgriezt no 17. att. dotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 16. att. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.



16. att.

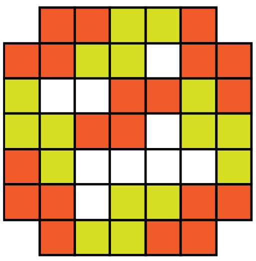


17. att.

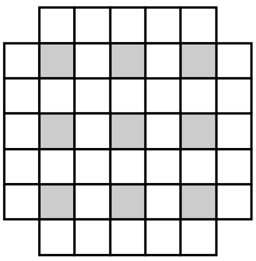
Atrisinājums

Lielākais figūru skaits, ko var izgriezt, ir 9, skat. 18. att.

Pierādīsim, ka vairāk figūru nevar izgriezt. Izkrāsosim 17. att. figūru kā parādīts 19. att. Lai kā novietotu 16. att. figūru, tā pārklās tieši vienu iekrāsoto rūtiņu. Tā kā ir tieši deviņas iekrāsotas rūtiņas, tad nevar izgriezt vairāk kā 9 figūras.



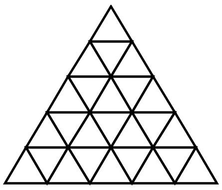
18. att.



19. att.

6. piemērs

Regulārs trijstūris ar malas garumu 5 sadalīts 25 mazākos regulāros trijstūros ar malas garumu 1 (skat. 20. att.). Kādu lielāko skaitu rombu, kas izveidots no diviem mazajiem trijstūriem, var izgriezt no dotā trijstūra?

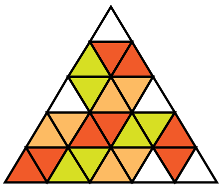


20. att.

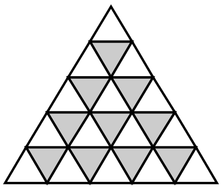
Atrisinājums

Lielākais rombu skaits, ko var izgriezt, ir 10, skat. 21. att.

Pierādīsim, ka vairāk kā 10 rombus izgriezt nevar. Iekrāsosim mazos trijstūrus, kā parādīts 22. att. Ievērosim, ka katrs izgrieztais rombs satur vienu baltu un vienu melnu trijstūri. Tā kā melno trijstūru skaits ir 10, tad vairāk kā 10 rombus izgriezt nevar.



21. att.



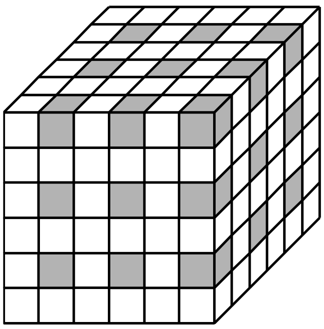
22. att.

7. piemērs

Vai kubu ar izmēriem $6 \times 6 \times 6$ vienības kubiņi var salikt no 27 paralēlskaldņiem, kuru izmēri ir $1 \times 2 \times 4$ vienības kubiņi?

Atrisinājums

Nē, nevar. Izkrāsosim kubiņus tā, kā parādīts 23. att. Izkrāsoto kubiņu skaits ir $9 \cdot 3 = 27$. Katrs paralēlskaldnis satur vai nu 0, vai 2 iekrāsotos kubiņus. Tas nozīmē, ka dotie paralēlskaldņi kopā satur pāra skaita iekrāsotos kubiņus. Tā kā ir 27 (nepāra skaitlis) iekrāsotie kubiņi, tad uzdevumā prasītais nav iespējams.



23. att.

Vairāk informācijas:

- http://nms.lu.lv/biblioteka/tematiskie-materiali/
    - A. Ambainis, A. Andžāns, A. Bērziņš "Uzdevumi algoritmikā un algoritmiskajā kombinatorikā ar atrisinājumiem" – Rīga, 2004;
    - Andžāns, A. Reihenova, L. Ramāna, B. Johannessons "Invariantu metode" – Rīga, 1997.
- http://nms.lu.lv/biblioteka/uzdevumu-krajumi/

  Uzdevumu krājumu beigās dots uzdevumu sadalījums pa tēmām, kur var sameklēt papildus uzdevumus par iekrāšošanu.