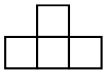
Latvijas 42. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi un atrisinājumi

5.1. Izsaki skaitli 1 kā piecu atšķirīgu daļu summu, kuru saucēji ir vienādi!

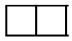
Atrisinājums

Piemēram, $\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{15}{15}=1$.

5.2. Vai taisnstūri ar izmēriem 6×10 rūtiņas var pārklāt ar vienu 1. att. redzamo figūru un 28 figūrām, kādas redzamas 2. att.? Figūras drīkst pagriezt.



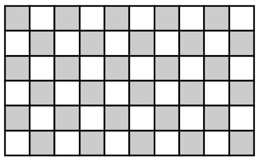
1. att.



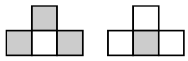
2. att.

Atrisinājums

Nē, prasīto izdarīt nevar. Iekrāsosim doto taisnstūri kā šaha galdiņu (skat. A1. att.). Lai kur novietotu 2. att. figūru, tā vienmēr pārklās tieši vienu melnu rūtiņu, tātad 28 tādas figūras kopā pārklās 28 melnas rūtiņas. Ar vienu 1. att. figūru var pārklāt vai nu tieši 3 melnas, vai tieši 1 melnu rūtiņu (skat. A2. att.), tātad kopā ar visām dotajām figūrām būs pārklātas 29 vai 31 melna rūtiņa, bet taisnstūrī ir 30 melnas rūtiņas. Līdz ar to taisnstūri ar dotajām figūrām pārklāt nav iespējams.



A1. att.



A2. att.

5.3. Vai iespējams uzzīmēt tādu taisnstūri, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, bet **a)** laukums ir pirmskaitlis; **b)** perimetrs ir pirmskaitlis?

Atrisinājums

a) Jā, piemēram, der taisnstūris ar malu garumiem 1 un 3, tad laukums ir 3, kas ir pirmskaitlis.

b) Nē, nav iespējams. Ja taisnstūra malu garumi ir a un b, tad taisnstūra perimetrs ir $P=2\cdot(a+b)$. Perimetrs vienmēr ir pāra skaitlis. Vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tāpēc $a+b$ būtu jābūt vienādam ar 1, bet tas nav iespējams, jo a un b ir naturāli skaitļi.

5.4. Kādu naturālu skaitli, saskaitot ar savu ciparu summu, iegūst skaitli 328? Atrodi visus tādus skaitļus un pamato, ka citu nav!

Atrisinājums

Meklētajam skaitlim nevar būt mazāk kā trīs cipari, jo pat lielāko divciparu skaitli saskaitot ar tā ciparu summu iegūst $99+9+9=117$, kas ir mazāk nekā 328. Meklētajam skaitlim nevar būt vairāk kā trīs cipari, jo tad, saskaitot šo skaitli ar tā ciparu summu, iegūst vismaz četrciparu skaitli. Tātad meklētais skaitlis ir trīsciparu, tā pirmo ciparu apzīmējam ar a, otro – ar b, trešo – ar c. Tā kā meklētā skaitļa un tā ciparu summa ir 328, tad a nav lielāks kā 3. Līdz ar to ciparu summa $a+b+c$ nevar būt lielāka kā $3+9+9=21$, tāpēc meklētais skaitlis nav mazāks kā $328-21=307$. Tas nozīmē, ka $a=3$. Ievērojam, ka skaitļa otrais cipars b var būt tikai 0, 1 vai 2. Apskatām katru no gadījumiem.

1) Ja $b=0$, tad meklēto skaitli var uzrakstīt kā summu $300+c$ un tā ciparu summa ir $3+0+c=3+c$. Tātad $300+c+3+c=328$ jeb $2c=25$, kas ir pretrunā ar to, ka c ir cipars.

2) Ja $b=1$, tad meklēto skaitli var uzrakstīt kā summu $310+c$ un tā ciparu summa ir $3+1+c=4+c$. Tātad $310+c+4+c=328$ jeb $2c=14$, no kā izriet, ka $c=7$ un meklētais skaitlis ir 317 (tiešām $317+3+1+7=328$).

3) Ja $b=2$, tad meklēto skaitli var uzrakstīt kā summu $320+c$ un tā ciparu summa ir $3+2+c=5+c$. Tātad $320+c+5+c=328$ jeb $2c=3$, kas ir pretrunā ar to, ka c ir cipars.

Tātad vienīgais skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir 317.

5.5. Dotas 9 pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām 2 ir viltotas. Visu īsto monētu masas ir vienādas. Arī abām viltotajām monētām ir vienāda masa, bet tā ir lielāka nekā īstās monētas masa. Kā ar 4 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast abas viltotās monētas?

Atrisinājums

Sanumurēsim monētas ar skaitļiem no 1 līdz 9 un sadalīsim grupās pa trim: $a=(1,2,3)$, $b=(4,5,6)$, $c=(7,8,9)$. Abas viltotās monētas var atrasties vienā grupā vai arī divās dažādās grupās. Vispirms ar divām svēršanām noskaidrosim, kurās grupās atrodas viltotās monētas. Salīdzinām *a* ar *b*, tad smagāko no tām (vai jebkuru, ja tās vienādas) salīdzinām ar *c*:

- ja $a>b$ (tad grupā *b* visas monētas ir īstas) un
  - $a>c$, tad abas viltotās monētas ir grupā *a*;
  - $a=c$, tad viena viltotā monēta ir grupā *a*, otra – *c*;
- ja $a=b$ (tad abās grupās ir vienāds skaits viltoto monētu) un
  - $a>c$, tad viena viltotā monēta ir grupā *a*, otra – *b*;
  - $a<c$, tad abas viltotās monētas ir grupā *c*.

Gadījums, kad $a<b$ ir identisks gadījumam, kad $a>b$.

Tā ar divām svēršanām esam noskaidrojuši viltoto monētu sadalījumu pa grupām. Tālāk katrā grupā, kur ir kāda viltotā monēta, uz katra svaru kausa uzliekot pa vienai monētai un vienu atstājot malā, ar vienu svēršanu var noskaidrot, kura ir viltotā:

- ja grupā ir viena viltotā monēta un
  - svaru kausi nav līdzsvarā, tad smagākā ir viltotā;
  - svaru kausi ir līdzsvarā, tad šīs abas ir īstas un viltota ir tā trešā, kas stāv malā;
- ja grupā ir divas viltotas monētas un
  - svaru kausi ir līdzsvarā, tad tās abas ir viltotas;
  - svaru kausi nav līdzsvarā, tad vieglākā ir īstā, bet abas pārējās (smagākā un tā, kas stāv malā) ir viltotas.

6.1. Profesors Cipariņš iedomājās četrus skaitļus, kuru summa ir vesels skaitlis. Pēc tam viņš saskaitīja šos skaitļus visos iespējamos veidos pa pāriem un ieguva sešas summas. Izrādījās, ka viena no šīm summām ir daļskaitlis. **a)** Pierādi, ka vēl vismaz viena no iegūtajām summām ir daļskaitlis. **b)** Vai var būt tā, ka tieši divas summas ir daļskaitļi, bet pārējās – veseli skaitļi?

Atrisinājums

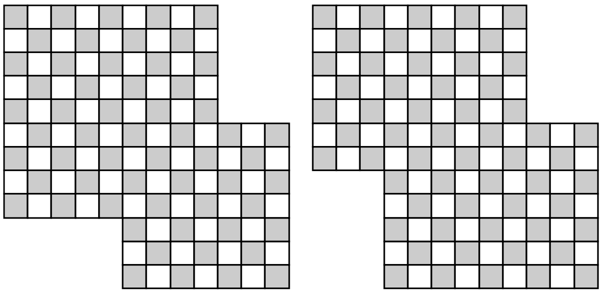
a) Visu četru skaitļu *a*, *b*, *c*, *d* summu apzīmēsim ar $S=a+b+c+d$ un to summu, kas ir daļskaitlis, apzīmēsim ar $S_1=a+b$. Tā kā S ir vesels skaitlis, tad starpība $S-S_1=a+b+c+d-(a+b)=c+d$ arī ir daļskaitlis. Tātad vēl vismaz viena no iegūtajām summām ir daļskaitlis.

b) Jā, tieši divas summas var būt daļskaitļi, ja profesors Cipariņš ir iedomājies, piemēram, skaitļus $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$.

6.2. Vai kvadrātu ar izmēriem 12×12 rūtiņas, kuram no diviem pretējiem stūriem izgriezti taisnstūri 3×5 rūtiņas, var pārklāt ar 57 taisnstūriem, kuru izmēri ir 1×2 rūtiņas?

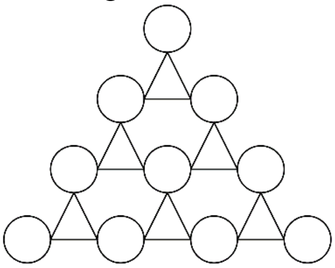
Atrisinājums

Nē, prasīto izdarīt nevar. Ir divi dažādi veidi, kā no kvadrāta pretējiem stūriem var izgriezt 3×5 rūtiņu taisnstūrus: 1) viens novietots horizontāli, otrs – vertikāli, 2) abi novietoti vienā virzienā. Iekrāsosim atlikušo figūru kā šaha galdiņu. Neatkarīgi no tā, kā ir izgriezti taisnstūri, figūrā ir 58 melnas un 56 baltas rūtiņas (skat. A3. att.). Lai kur novietotu domino kauliņu, tas vienmēr pārklās tieši vienu melnu un tieši vienu baltu rūtiņu. Līdz ar to 57 domino kauliņi pārklās vienāda skaita melno un balto rūtiņu. Iegūta pretruna, jo figūrā nav vienāds skaits melno un balto rūtiņu.



A3. att.

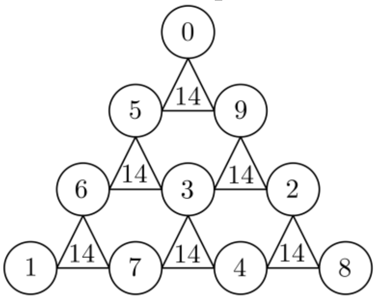
6.3. Aldis aplīšos (skat. 3. att.) ierakstīja ciparus no 0 līdz 9 (katrā aplītī citu) un katrā trijstūrī ierakstīja tā virsotnēs esošo skaitļu summu. Vai var gadīties, ka visi seši trijstūros ierakstītie skaitļi ir vienādi?



3. att.

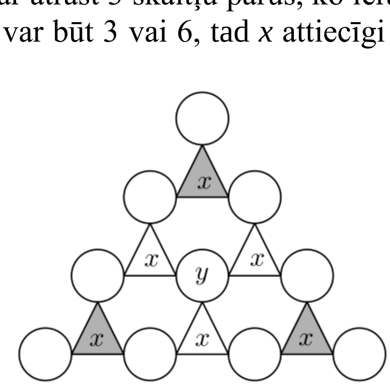
Atrisinājums

Jā, trijstūros ierakstītie skaitļi var būt vienādi, skat., piemēram, A4. att.

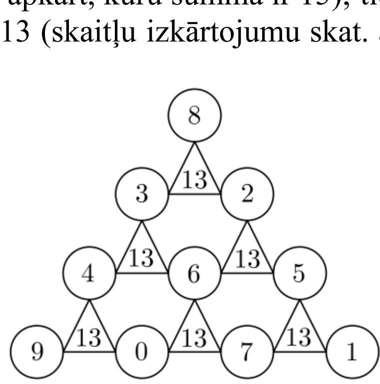


A4. att.

Piezīme. Atrisinājumu var palīdzēt atrast šādi spriedumi. Ar *x* apzīmējam summu, kas ierakstīta katrā trijstūrī, ar *y* – skaitli, kas ierakstīts *centrālajā* aplītī (skat. A5. att.). Ievērojam, ka pelēko trijstūru virsotnēs ierakstīto skaitļu un *centrālajā* aplītī ierakstītā skaitļa summa ir $0+1+2+...+9=3x+y$ jeb $3x+y=45$. Tā kā pēdējās vienādības labā puse dalās ar 3, tad arī kreisajai pusei jādalās ar 3. Tas iespējams tikai tad, ja *y* dalās ar 3. Skaitlis *y* nevar būt 0 (jo tad $x=15$ un nevar atrast 3 skaitļu pārus, ko ierakstīt tam apkārt, kuru summa ir 15); tieši tāpat *y* nevar būt 9. Tātad *y* var būt 3 vai 6, tad *x* attiecīgi ir 14 vai 13 (skaitļu izkārtojumu skat. attiecīgi A4. att. un A6. att.).



A5. att.



A6. att.

6.4. Pierādi, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar sastāvēt tikai no sešiniekiem un nullēm! (Skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi).

Atrisinājums

Tā kā skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi, tad visi dažādie pirmreizinātāji tam ir pāra skaitā. Ja skaitlis beidzas ar pāra skaita nullēm, tad šīs nulles varam atmest, jo šādā gadījumā mēs atmetam reizinātāju $10 = 2 \cdot 5$ pāra skaitā. Lai dotais skaitlis būtu kvadrāts, tad atlikušajam skaitlim (bez pāra skaita nullēm beigās) visi dažādie pirmreizinātāji jāsatur pāra skaitā. Ja atlikušā skaitļa pēdējie divi cipari ir

- 60, tad tas dalās ar 5, bet nedalās ar 25, tātad tam ir tieši viens pirmreizinātājs 5;
- 06 vai 66, tad šis skaitlis dalās ar 2, bet nedalās ar 4, tātad tam ir tieši viens pirmreizinātājs 2.

Tātad esam pierādījuši, ka dotais skaitlis nav naturālā skaitļa kvadrāts.

6.5. Vairāki bērni devās pārgājienā un mājupceļā katrs kā suvenīru paņēma vienu vai vairākus akmentiņus. Zināms, ka visu akmentiņu masas ir dažādas. Atpūtas brīdī katrs no bērniem izvēlējās vienu no saviem akmentiņiem un pēc vienas vai vairākām maiņām beigās dabūja kāda cita bērna akmentiņu.

Vai var būt, ka pēc šīs maiņas **a)** katra bērna akmentiņu kopējā masa samazinājās, **b)** tieši viena bērna akmentiņu kopējā masa palielinājās, bet katram no pārējiem bērniem – samazinājās?

Atrisinājums

a) Tas nav iespējams. Ja katra bērna akmentiņu masa būtu samazinājusies, tad arī visu akmeņu kopējai masai būtu jāsamazinās, bet maiņas rezultātā visu akmeņu kopējā masa nevar samazināties.

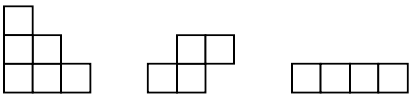
b) Tas ir iespējams. Parādīsim piemēru, kurā tas izpildās. Visi bērni paņem rokā to akmentiņu, ko plānojuši mainīt un sastājas rindā tā, ka pirmais stāv bērns ar visvieglāko akmeni, otrais – ar otru vieglāko akmeni, …, pēdējais – ar vissmagāko akmeni. Ja pirmais bērns iedod savu akmeni otrajam, otrais – trešajam, …, pēdējais – pirmajam, tad tikai pirmajam bērnam akmentiņu masa ir palielinājusies, bet visiem pārējiem – samazinājusies.

7.1. Deviņas vienādas cepures kopā maksā mazāk nekā 10 eiro, bet desmit tādas pašas vienādas cepures maksā vairāk nekā 11 eiro. Cik maksā viena cepure?

Atrisinājums

Ar c apzīmējam vienas cepures cenu. Tad no dotā izriet, ka $9c < 10$ un $10c > 11$ jeb $c < 1\frac{1}{9}$ un $c > 1\frac{1}{10}$. Tātad $c \in \left(1\frac{1}{10}; 1\frac{1}{9}\right)$ un, ievērojot, ka $1\frac{1}{10} = 1{,}10$ un $1\frac{1}{9} = 1{,}111...$, iegūstam, ka cepures cena ir 1,11 eiro.

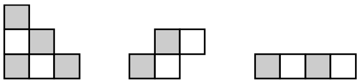
7.2. Vai taisnstūri ar izmēriem 7×6 rūtiņas var pārklāt ar 4. att. redzamajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



4. att.

Atrisinājums

Nē, nevar. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā. Melnā krāsā ir nokrāsota 21 (nepāra skaits) rūtiņa. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietotas dotās figūras, katra no tām vienmēr noklās pāra skaita melnās rūtiņas (skat. A7. att.). Tāpēc arī visas izmantotās figūras kopā var noklāt tikai pāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā taisnstūrī, tad taisnstūri pilnībā pārklāt nevar.



A7. att.

Piezīme. Der arī krāsojums joslās.

7.3. **a)** Atrast tādu naturālu skaitli, kura ciparu summa ir 13, pēdējie divi cipari ir 13 un kurš dalās ar 13.
b) Vai var atrast tādu naturālu skaitli, kura ciparu summa ir 11, pēdējie divi cipari ir 11 un kurš dalās ar 11?

Atrisinājums

a) Der, piemēram, skaitlis 11713, jo $1+1+7+1+3=13$ un $11713:13=901$.

Piezīme. Atrisinājumu var palīdzēt atrast šādi spriedumi. Skaitļa pirmo ciparu (bez pēdējiem diviem cipariem 1 un 3) veidotā skaitļa *x* ciparu summai jābūt 9. Tas nozīmē, ka skaitlis *x* dalās ar 9. Bet tam ir jādalās arī ar 13, jo meklētajam skaitlim $100x+13$ jādalās ar 13 un skaitļi 100 un 13 ir savstarpēji pirmskaitļi. Tātad *x* jādalās ar $9\cdot 13=117$. Pats skaitlis 117 arī ir mazākais iespējamais skaitlis *x*.

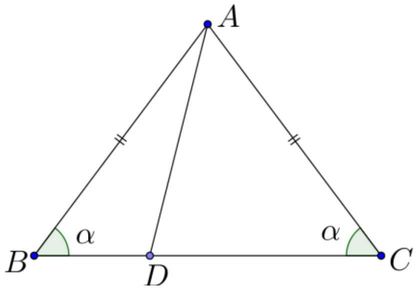
b) Nē, nevar. Izmantosim dalāmības pazīmi ar 11: skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu, kas atrodas pāra pozīcijās, summas un ciparu, kas atrodas nepāra pozīcijās, summas starpība dalās ar 11.

Pieņemsim, ka var atrast skaitli formā $\overline{m_1 m_2 \ldots m_k 11}$, kas dalās ar 11. Tad $(m_1+m_3+\ldots)-(m_2+m_4+\ldots)$ jādalās ar 11. Tā kā $m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k=9$, tad vienīgā iespēja, ka $(m_1+m_3+\ldots)-(m_2+m_4+\ldots)=0$. Saskaitot pēdējās divas vienādības, iegūstam, ka $2\cdot(m_1+m_3+m_5+\ldots)=9$ jeb $m_1+m_3+m_5+\ldots=4{,}5$, kas nav iespējams nekādām ciparu m_i vērtībām.

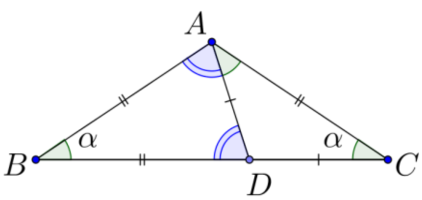
7.4. Vienādsānu trijstūrī *ABC* uz pamata malas *BC* atzīmēts iekšējs punkts *D* tā, ka arī trijstūri *ABD* un *ACD* ir vienādsānu. Aprēķini trijstūra *ABC* leņķus! *Atrodi visus gadījumus un pamato, ka citu nav!*

Atrisinājums

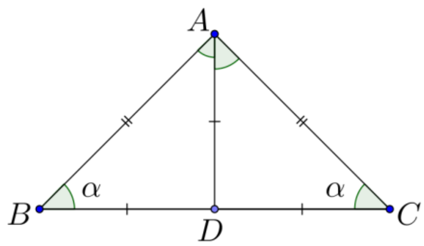
Apzīmējam $\angle ABC=\angle ACB=\alpha$ (skat. A8. att.).



A8. att.



A9. att.



A10. att.

Apskatām vienādsānu trijstūri *ABD*. Iespējami trīs gadījumi, kuras ir šī trijstūra vienādās malas.

1) Ja $AB=AD$, tad punkts *D* nav *BC* iekšējs punkts.

2) Ja $BD=AB$, apskatām vienādsānu trijstūri *ACD*. Iespējami trīs gadījumi, kuras ir šī trijstūra vienādās malas.

   2.1) Ja $AD=AC$, tad punkts *D* nav *BC* iekšējs punkts.

   2.2) Ja $AC=CD$, tad $AB+AC=BC$, kas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību.

   2.3) Ja $AD=CD$ (skat. A9. att.), tad $\angle ADC=180°-2\alpha$ un $\angle BDA=\angle BAD=2\alpha$. Tad no ΔBAD iekšējo leņķu summas izriet, ka $\alpha+2\alpha+2\alpha=180°$ jeb $\alpha=36°$. Līdz ar to trijstūra *ABC* leņķi ir $\angle ABC=\angle ACB=36°$ un $\angle BAC=108°$.

3) Ja $AD=BD$, apskatām vienādsānu trijstūri *ACD*. Iespējami trīs gadījumi, kuras ir šī trijstūra vienādās malas.

   3.1) Ja $AD=AC$, tad punkts *D* nav *BC* iekšējs punkts.

   3.2) Ja $AC=CD$, tad simetrijas dēļ šis gadījums ir analogs 2.3) gadījumam.

   3.3) Ja $AD=CD$, tad $\angle ABD=\angle ACB=\angle CAD=\angle BAD=\alpha$ (skat. A10. att.). No ΔABC iekšējo leņķu summas izriet, ka $4\alpha=180°$ jeb $\alpha=45°$. Līdz ar to trijstūra *ABC* leņķi ir $\angle ABC=\angle ACB=45°$ un $\angle BAC=90°$.

7.5. Uz galda stāv četras pēc izskata vienādas bumbiņas, to masas attiecīgi ir 10, 11, 12 un 13 grami. Vai ar dažām svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem, kur katrā kausā drīkst ielikt tieši divas bumbiņas, iespējams

a) atrast visvieglāko un vissmagāko bumbiņu;

b) noteikt katras bumbiņas masu?

Atrisinājums

Tā kā katrā svaru kausā drīkst ielikt tieši divas bumbiņas, tad ir iespējami trīs dažādi varianti, kā bumbiņas var būt izvietotas uz svaru kausiem:

- $10+11<12+13$;
- $10+12<11+13$;
- $10+13=11+12$.

Veiksim visas trīs iespējamās svēršanas. Smagākā būs bumbiņa, kas abos nevienādajos rādījumos bija uz smagākā kausa, bet vieglākā – kas abos nevienādajos rādījumos bija uz vieglākā kausa. Atlikušās divas bumbiņas pēc visu iespējamo svēršanu rezultātiem atšķirt nav iespējams. Tātad a) visvieglāko un vissmagāko bumbiņu ir iespējams atrast, b) noteikt katras bumbiņas masu noteikt nav iespējams.

8.1. Nosaki, vai izteiksmes $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ vērtība ir racionāls skaitlis!

Atrisinājums

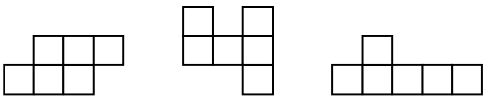
Pārveidojam doto izteiksmi:

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=$$

$$=|\sqrt{5}+1|-|\sqrt{5}-1|=\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1=2.$$

Izteiksmes vērtība ir racionāls skaitlis, jo 2 ir racionāls.

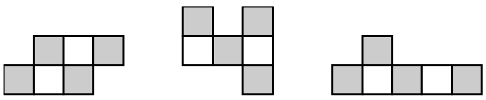
8.2. Vai taisnstūri ar izmēriem 10×9 rūtiņas var pārklāt ar 5. att. redzamajām figūrām? Taisnstūrim jābūt pilnībā pārklātam. Figūras nedrīkst iziet ārpus taisnstūra, figūras nedrīkst pārklāties, tās drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.



5. att.

Atrisinājums

Nē, nevar. Izkrāsosim taisnstūri šaha galdiņa veidā. Taisnstūrī kopā ir 90 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 6 rūtiņas. Lai kā arī šajā taisnstūrī tiktu novietotas dotās figūras, katra no tām vienmēr pārklāj pāra skaita melnās rūtiņas (skat. A11. att.). Tātad visas figūras kopā pārklās pāra skaita melnās rūtiņas. Tā kā taisnstūrī melnā krāsā ir nokrāsotas 45 (nepāra skaits) rūtiņas, tad prasīto nevar izdarīt.



A11. att.

Piezīme. Der arī krāsojums joslās.

8.3. Atrast vienu naturālu skaitli, kas lielāks nekā 2015 un ko nevar izteikt kā naturāla skaitļa kvadrāta un pirmskaitļa summu.

Atrisinājums

Der, piemēram, skaitlis 2500. Parādīsim, ka to nevar izteikt kā izteikt kā naturāla skaitļa kvadrāta un pirmskaitļa summu. Pieņemsim pretējo, ka $2500=k^2+p$, kur k ir naturāls skaitlis un p ir pirmskaitlis. Tad $p=2500-k^2=50^2-k^2=(50-k)(50+k)$. Lai p būtu pirmskaitlis, mazākajam reizinātājam jābūt vienādam ar 1, tas ir, $50-k=1$ jeb $k=49$. Tādā gadījumā $p=50+49=99$, kas nav pirmskaitlis. Tātad pieņēmums ir aplams un skaitli 2500 nevar izteikt kā naturāla skaitļa kvadrāta un pirmskaitļa summu.

Piezīme. Der jebkurš naturāls skaitlis $n>2015$ tāds, ka $n=m^2$ un $2m-1$ ir salikts skaitlis.

8.4. Divu taisnstūra paralēlskaldņu visu šķautņu garumi ir naturāli skaitļi. Pirmā paralēlskaldņa trīs dažādo skaldņu perimetri ir p_1, q_1, r_1, bet otrā p_2, q_2, r_2, turklāt $p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$ un $r_1 < r_2$. Vai var apgalvot, ka pirmā paralēlskaldņa tilpums ir mazāks nekā otrā paralēlskaldņa tilpums?

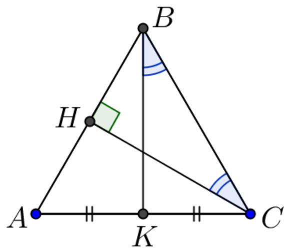
Atrisinājums

Dotais apgalvojums ne vienmēr ir patiess. Parādīsim pretpiemēru. Par pirmo izvēlēsimies paralēlskaldni, kura šķautņu garumi ir 3, 10 un 12, bet par otro – kura šķautņu garumi 2, 12 un 14. Tad $p_1 = 2\cdot(3+10) = 26$, $q_1 = 2\cdot(3+12) = 30$ un $r_1 = 2\cdot(10+12) = 44$, bet $p_2 = 2\cdot(2+12) = 28$, $q_2 = 2\cdot(2+14) = 32$ un $r_2 = 2\cdot(12+14) = 52$. Tātad ir spēkā uzdevumā dotās sakarības: $p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$ un $r_1 < r_2$, bet paralēlskaldņu tilpumi ir $V_1 = 3\cdot 10\cdot 12 = 360$ un $V_2 = 2\cdot 12\cdot 14 = 336$, kur pirmā paralēlskaldņa tilpums ir lielāks nekā otrā paralēlskaldņa tilpums.

8.5. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums CH un mediāna BK. Zināms, ka $CH = BK$ un $\angle HCB = \angle KBC$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir vienādmalu!

Atrisinājums

1. risinājums. Tā kā $BK = HC$, $\angle KBC = \angle HCB$ un BC – kopīga mala (skat. A12. att.), tad $\Delta BCK = \Delta BCH$ pēc pazīmes "$m\ell m$". Līdz ar to $\angle BKC = \angle CHB = 90°$ (kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros). Tātad BK ir gan augstums, gan mediāna, līdz ar to ΔABC ir vienādsānu trijstūris ($AB = BC$). Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu, iegūstam $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CH = \frac{1}{2}AC\cdot BK$. Tā kā $CH = BK$, tad arī $AB = AC$. Tātad $AB = AC = BC$ un ΔABC ir vienādmalu trijstūris.



A12. att.

2. risinājums. Tā kā $BK = HC$, $\angle KBC = \angle HCB$ un BC – kopīga mala (skat. A12. att.), tad $\Delta BCK = \Delta BCH$ pēc pazīmes "$m\ell m$". Līdz ar to $\angle BKC = \angle CHB = 90°$ (kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros) un BK ir augstums no virsotnes B pret malu AC. Tā kā $AK = KC$, $\angle AKB = \angle BKC = 90°$ un BK – kopīga mala, tad $\Delta AKB = \Delta BCK$ pēc pazīmes "$m\ell m$". No kā izriet, ka $\angle ABK = \angle KBC$. Izmantojot trijstūra iekšējo leņķu summu, iegūstam

- no ΔHCB: $\angle HBC + \angle BCH + \angle CHB = 180°$;
  $2\cdot\angle ABK + \angle ABK + 90° = 180°$;
  $3\cdot\angle ABK = 90°$ jeb $\angle ABK = 30°$;
- no ΔABK: $\angle BAC = 180° - \angle ABK - \angle AKB = 180° - 30° - 90° = 60°$;
- no ΔABC: $\angle BCA = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 60° - 2\cdot 30° = 60°$.

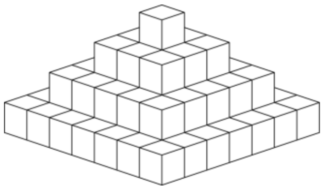
Esam ieguvuši, ka katrs trijstūra ABC leņķis ir $60°$, tātad ΔABC ir vienādmalu trijstūris.

9.1. No visiem tādiem skaitļiem, kuru starpība ir 2015, noteikt tos divus, kuru reizinājums ir vismazākais!

Atrisinājums

Dotos skaitļus apzīmējam ar x un $x+2015$. Šo skaitļu reizinājums ir $x\cdot(x+2015)$. Apskatām funkciju $f(x) = x\cdot(x+2015) = x^2 + 2015x$. Funkcijas grafiks ir parabola ar zaru vērsumu uz augšu. Parabolas virsotnes abscisa $x_0 = \frac{-2015}{2} = -1007{,}5$ ir punkts, kurā funkcija sasniedz vismazāko vērtību. Tātad meklētie divi skaitļi ir $-1007{,}5$ un 1007,5.

9.2. Tornis ir salikts no vienības kubiņiem, kur katra kubiņa izmērs ir $1\times1\times1$. Apakšējā slānī ir 7×7 kubiņi. Otrs slānis ir novietots virs pirmā slāņa centrālās daļās, tajā ir 5×5 kubiņi. Trešajā slānī, kurš novietots apakšējās daļas centrā, ir 3×3 kubiņi un augšā centrā ir 1 vienības kubiņš (skat. 6. att.). Vai šo torni var salikt no blokiem ar izmēriem $1\times1\times3$?



6. att.

Atrisinājums

Katru slāni izkrāsosim trīs krāsās *diagonālveidā* (skat. A13. att.). Katrs bloks ar izmēriem $1\times1\times3$ satur visas trīs krāsas, tāpēc visi bloki kopā satur vienāda skaita katras krāsas kubiņu. Tā kā tornis satur 29 vienības kubiņus krāsā 1, 28 – krāsā 2, 27 – krāsā 3, tad torni nevar salikt no blokiem ar izmēriem $1\times1\times3$.

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

1	2	3	1	2
2	3	1	2	3
3	1	2	3	1
1	2	3	1	2
2	3	1	2	3

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1

A13. att.

9.3. Pierādi, ka x^5-5x^3+4x dalās ar 120, ja x ir vesels skaitlis!

Atrisinājums

Sadalām doto izteiksmi reizinātājos:

$$x^5-5x^3+4x=x\cdot(x^4-5x^2+4)=x\cdot(x^4-x^2-4x^2+4)=x\cdot(x^2(x^2-1)-4(x^2-1))=$$

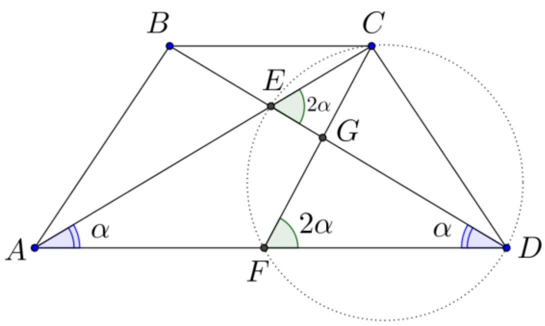
$$=x\cdot(x^2-1)\cdot(x^2-4)=x\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)=(x-2)\cdot(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2).$$

Esam ieguvuši, ka dotā izteiksme ir piecu pēc kārtas esošu skaitļu reizinājums. Vismaz divi no šiem skaitļiem dalās ar 2, no kuriem viens arī ar 4, vismaz viens – ar 3, un vismaz viens – ar 5. Tātad šo skaitļu reizinājums dalās ar $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

9.4. Vienādsānu trapeces *ABCD* sānu malas ir *AB* un *CD*, bet diagonāles *AC* un *BD* krustojas punktā *E*. Ap trijstūri *CDE* apvilktā riņķa līnija krusto garāko pamatu *AD* iekšējā punktā *F*. Nogriežņu *CF* un *BD* krustpunkts ir *G*. Nosaki $\angle CGD$ lielumu, ja $\angle CAD=\alpha$!

Atrisinājums

Tā kā trapece *ABCD* ir vienādsānu, tad arī $\angle ADE=\alpha$ (skat. A14. att.). No trijstūra *AED* iegūstam, ka $\angle AED=180°-2\alpha$. Izmantojot blakusleņķu īpašību, iegūstam, ka $\angle CED=2\alpha$. Punkti *C*, *E*, *F*, *D* atrodas uz vienas riņķa līnijas, tāpēc $\angle CED=\angle CFD=2\alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena loka *CD*. No trijstūra *FGD* iegūstam, ka $\angle FGD=180°-3\alpha$ un šī leņķa blakusleņķis $\angle CGD=3\alpha$.



A14. att.

9.5. Parādi, kā naturālos skaitļus no 1 līdz $2n-1$ uzrakstīt rindā tā, ka visas blakus esošo skaitļu starpības (no lielākā skaitļa atņem mazāko) ir dažādas un skaitlis 1 ir vidējais (n-tais), ja **a)** $n=5$; **b)** $n=1008$.

Atrisinājums

a) Der, piemēram, virkne

7;		4;		6;		5;		1;		9;		2;		8;		3
	3		2		1		4		8		7		6		5	

b) Aplūkosim skaitļu virkni $1; 2015; 2; 2014; 3; 2013; 4; 2012; \ldots; 1007; 1009; 1008$ (šī virkne sastāv no divām virknēm – vienas augošas $1; 2; 3; \ldots; 1008$ un otras dilstošas $2015; 2014; \ldots; 1009$). Šajā virknē ir visi skaitļi no 1 līdz 2015 un starpības starp katriem diviem blakus esošiem skaitļiem dilst no 2014 līdz 1. Šī virkne pēc savām īpašībām ir ļoti līdzīga nepieciešamajai, tikai skaitlis 1 šajā virknē ir pirmais nevis 1008. loceklis. Virknes 1008. loceklis (jeb 504. loceklis dilstošajā virknē ir $a_{504}=2015+(-1)(504-1)=1512$) ir 1512, virknes 1009. loceklis (jeb 505. loceklis augošajā virknē) ir 505. Starpība starp virknes 1008. un 1009. locekli ir $1512-505=1007$. „Pārgriezīsim” izveidoto virkni starp 1008. un 1009. elementu, iegūstot divus virknes fragmentus, no kuriem pirmais satur 1008 locekļus, bet otrais satur 1007 locekļus. No sākotnējām blakus elementu starpībām ir pazaudēta tikai „pārgrieztā” starpība 1007. Tagad saliksim šos fragmentus pretējā secībā – tā, ka vispirms ir fragments, kurā ir 1007 skaitļi un kurš beidzas ar skaitli 1008, un pēc tam fragments, kurā ir 1008 skaitļi un kurš sākas ar skaitli 1. „Salīmēsim” šos fragmentus kopā, iegūstot trūkstošo starpību 1007. Vajadzīgā virkne ir izveidota, skaitlis 1 ir jaunās virknes 1008. loceklis un starp blakus elementu starpībām atrodami visi skaitļi no 1 līdz 2014:

505;		1511;		506;		1510;		…		1010;		1007;		1009;		1008;		**1;**		2015;		2;		2014;		3;		…		504;		1512
	1006		1005		1004		1003		…		4		3		2		1		1007		2014		2013		2012		2011		2010		…		1009		1008	

10.1. Nosaki funkcijas **a)** $y=x^2+2x+2$, **b)** $y=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ vērtību kopu!

Atrisinājums

a) Dotās funkcijas grafiks ir parabola, kuras zari ir vērsti uz augšu, tāpēc funkcijai ir vismazākā, bet nav vislielākās vērtības. Parabolas virsotnes abscisa $x_0=\dfrac{-2}{2}=-1$ ir punkts, kurā funkcija sasniedz vismazāko vērtību $y_0=1-2+2=1$. Tātad funkcijas vērtību kopa ir $[1; +\infty)$.

b) Pārrakstām doto funkciju formā $y=\dfrac{1}{(x+1)^2+1}$. Skaitītāja izteiksme nav vienāda ar 0 un saucējs ir pozitīvs, tāpēc $y>0$. Tā kā $(x+1)^2+1\geq 1$, tad $y=\dfrac{1}{(x+1)^2+1}\leq\dfrac{1}{1}=1$. Tātad funkcijas vērtību kopa ir $(0; 1]$.

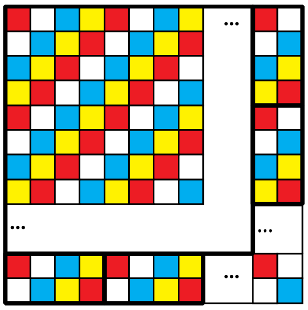
10.2. Kādām naturālām n vērtībām kvadrātu $n\times n$ rūtiņas var sagriezt taisnstūros ar izmēriem 1×4 rūtiņas? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.

Atrisinājums

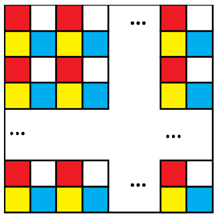
Ja n – nepāra skaitlis, tad kvadrāts $n\times n$ satur nepāra skaita rūtiņas, kas nedalās ar 4 – rūtiņu skaitu taisnstūrī. Tātad n jābūt pāra skaitlim. Aplūkosim divus iespējamos gadījumus.

- Ja $n=4k$ (k – naturāls skaitlis), tad kvadrātu ir iespējams sagriezt prasītajā veidā, piemēram, vispirms kvadrātu sagriež pa rindām (taisnstūros $1\times 4k$) un tad katru rindu k taisnstūros, kuru izmēri ir 1×4.
- Ja $n=4k+2$ (k – naturāls skaitlis), tad izkrāsosim kvadrātu četrās krāsās *diagonālveidā* (skat. A15. att.). Lai kā arī grieztu, taisnstūris 1×4 vienmēr saturēs visu četru krāsu rūtiņas. Tātad kvadrātā visu krāsu rūtiņām ir jābūt vienādā skaitā. Noskaidrosim, cik katras krāsas rūtiņu ir kvadrātā. Tā kā kvadrātu $4k\times 4k$ var sagriezt taisnstūros 1×4, tad tajā visu krāsu

rūtiņas ir vienādā skaitā. Pēdējās divas kolonnas un rindas dalām taisnstūros 4×2, arī tajos visu krāsu rūtiņas ir vienādā skaitā, jo katru no tiem var sadalīt divos taisnstūros 1×4. Vēl paliek kvadrāts 2×2, kurā dzeltenās krāsas rūtiņa nav vispār un ir divas baltās rūtiņas. Iegūta pretruna ar to, ka kvadrātā visu krāsu rūtiņas ir vienādā skaitā. Līdz ar to kvadrātu, kura malas garums ir $n=4k+2$, nav iespējams sagriezt taisnstūros ar izmēriem 1×4 rūtiņas.



A15. att.



A16. att.

Esam ieguvuši, ka vienīgais gadījums, kad kvadrātu $n\times n$ rūtiņas var sagriezt taisnstūros ar izmēriem 1×4, ja $n=4k$, kur k – naturāls skaitlis.

Piezīme. Gadījumā, kad $n=4k+2$ (k – naturāls skaitlis), kvadrātu varēja izkrāsot četrās krāsās tā, kā parādīts A16. att. Tad, lai kā arī grieztu, taisnstūris 1×4 vienmēr saturēs tieši divas vienas krāsas un tieši divas citas krāsas rūtiņas. Tātad kvadrātā katras krāsas rūtiņām ir jābūt pāra skaitā, kas ir pretruna tam, ka katras krāsas rūtiņu skaits kvadrātā ir $\frac{(4k+2)^2}{4}=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$, kas ir nepāra skaitlis.

10.3. Atrast visus naturālos skaitļus, kas ir vienādi ar savu ciparu reizinājumu. (Par viencipara skaitļa ciparu reizinājumu sauc tā vienīgo ciparu.)

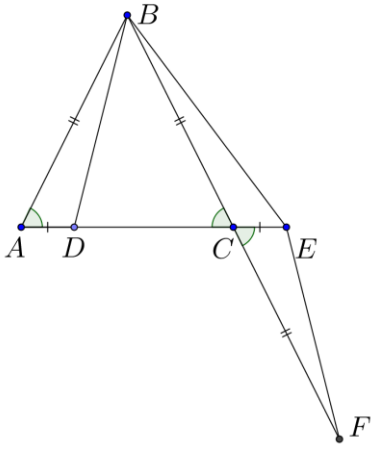
Atrisinājums

Ievērojam, ka visi viencipara skaitļi atbilst uzdevuma nosacījumiem. Pierādīsim, ka citu šādu skaitļu nav. Pieņemsim, ka $n=\overline{c_1c_2...c_k}$, kur $k\geq 2$ un $c_1\cdot c_2\cdot...\cdot c_k=n$. Tā kā $c_1,c_2,...,c_k$ ir cipari, tad $c_1\cdot c_2\cdot...\cdot c_k\leq c_1\cdot 9^{k-1}$. No otras puses $\overline{c_1c_2...c_k}\geq \overline{c_1\underbrace{0...0}_{k-1}}=c_1\cdot 10^{k-1}$. Esam ieguvuši, ka $n\leq c_1\cdot 9^{k-1}$ un $n\geq c_1\cdot 10^{k-1}$, kas vienlaicīgi nevar izpildīties. Tātad vienīgie skaitļi, kas apmierina uzdevuma prasības, ir visi viencipara skaitļi.

10.4. Uz vienādsānu trijstūra ABC pamata AC atlikts iekšējs punkts D, bet uz AC pagarinājuma – punkts E (C atrodas starp D un E) tā, ka $AD=CE$. Pierādīt, ka $BD+BE>2BC$.

Atrisinājums

Pagarinām malu BC un uz tās atliekam punktu F tā, ka $BC=CF$ (skat. A17. att.). Trijstūri DAB un ECF ir vienādi pēc pazīmes $m\ell m$, tāpēc $BD=EF$ kā atbilstošās malas. No trīsstūra nevienādības ΔBEF izriet, ka $BE+EF>BF=BC+CF=2BC$ jeb $BD+BE>2BC$.

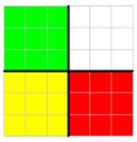


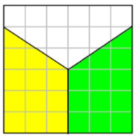
A17. att.

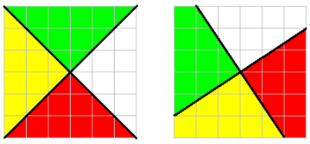
10.5. Jura dzimšanas dienas torte ir biezpiena kubs, kura četras sānu skaldnes un augšējā skaldne ir noklāta ar šokolādes glazūru (visur vienādi biezu). Kā šo torti sadalīt **a)** 4 daļās, **b)** 3 daļās tā, lai katras daļas forma ir taisna prizma un gan biezpiena, gan glazūras daudzums visās daļās ir vienāds?

Atrisinājums

Tortes augšējo skaldni sadalām *n* vienlielās figūrās tā, lai augšējās skaldnes perimetrs būtu sadalīts *n* vienādās daļās. Skat., piemēram, A18. att., kur $n=4$, un A19. att., kur $n=3$.


A18. att.


A19. att.


A20. att.

Lai iegūtās daļas būtu taisnas prizmas, veicam vertikālus griezienus perpendikulāri tortes pamatam. Tā kā visu daļu pamata laukumi ir vienādi un vienāds ir arī visu daļu augstums, tad visu daļu tilpumi ir vienādi jeb biezpiena daudzums visās daļās ir vienāds. Arī ar šokolādi noklātās virsmas laukums (glazūras daudzums) visām daļām ir vienāds, jo katrai daļai ar šokolādi noklātās virsmas laukums ir $\frac{P}{n}\cdot H+\frac{S}{n}$, kur *P* – kuba (tortes) augšējās skaldnes perimetrs, *S* – augšējās skaldnes laukums, *H* – kuba augstums.

Piezīme. a) Sadalīt tortes augšējo skaldni četrās vienlielās figūrās tā, lai augšējās skaldnes perimetrs būtu sadalīts četrās vienādās daļās, var veicot jebkādus divus perpendikulārus griezienus, kas iet caur augšējās skaldnes centru (skat., piemēram, A20. att.).

11.1. Aplūkojam visus deviņciparu skaitļus, kas nesatur 0 un kam visi cipari ir dažādi. Pierādīt, ka starp tiem pāra skaitļu ir tieši divas reizes mazāk nekā tādu, kas dalās ar 3, bet nedalās ar 5.

Atrisinājums

Visi deviņciparu skaitļi, kas nesatur nulli un kuriem nav vienādu ciparu, dalās ar 3, jo to ciparu summa ir $1+2+3+...+9=45$, kas dalās ar 3.

Atliek noskaidrot, cik starp tiem ir pāra skaitļu un cik tādu, kas nedalās ar 5.

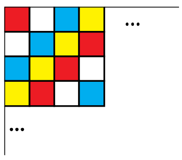
Pāra skaitļi ir tie, kas beidzas ar 2, 4, 6, 8, tātad deviņciparu skaitļa pēdējo ciparu var izvēlēties 4 veidos un visus atlikušos 8 ciparus izvēlēties $8!$ veidos, līdz ar to kopējais pāra skaitļu skaits ir $4\cdot 8!$.

Lai skaitlis nedalītos ar 5, tā pēdējais cipars nedrīkst būt 5, tātad to var izvēlēties 8 veidos (tas var būt jebkurš no cipariem $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$), pārējos 8 ciparus var salikt $8!$ veidos, tātad kopējais šādu skaitļu skaits ir $8\cdot 8!$. Redzams, ka tas ir tieši divas reizes lielāks nekā pāra skaitļu skaits.

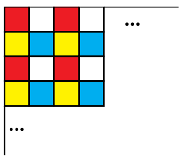
11.2. Taisnstūri var pārklāt ar mazākiem taisnstūriem, kuru izmēri ir 1×4 un 2×2. Vienu mazo taisnstūri, kura izmēri ir 2×2, aizvietoja ar taisnstūri 1×4. Vai, izmantojot šos taisnstūrus, vēl joprojām var pārklāt doto taisnstūri?

Atrisinājums

1. risinājums. Izkrāsosim taisnstūri četrās krāsās *diagonālveidā* (skat. A21. att.) Kvadrāts 2×2 vienmēr pārklāj tieši divas rūtiņas, kurām ir vienāda krāsa. Tātad figūrai, kas to aizvieto, arī jāpārklāj pāra skaita rūtiņas, kurām ir vienāda krāsa, bet katrs taisnstūris 1×4 pārklāj pa vienai rūtiņai no katras krāsas, tāpēc tas nav iespējams.



A21. att.



A22. att.

2. risinājums. Izkrāsosim taisnstūri četrās krāsās tā, kā parādīts A22. att. Kvadrāts 2×2 vienmēr pārklāj tieši vienu (nepāra skaitlis) baltu rūtiņu. Tātad figūrai, kas to aizvieto, arī jāpārklāj nepāra skaita baltās rūtiņas, bet katrs taisnstūris 1×4 pārklāj vai nu tieši divas baltas rūtiņas, vai nevienu baltu rūtiņu, tas ir, pāra skaita baltās rūtiņas, tāpēc tas nav iespējams.

11.3. Naturālam skaitlim n ar $M(n)$ apzīmēsim mazāko naturālo skaitli, kas beidzas ar n un kura ciparu summa ir n. Piemēram, $M(13)=913$. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu n, ka $M(n)$ dalās ar n.

Atrisinājums

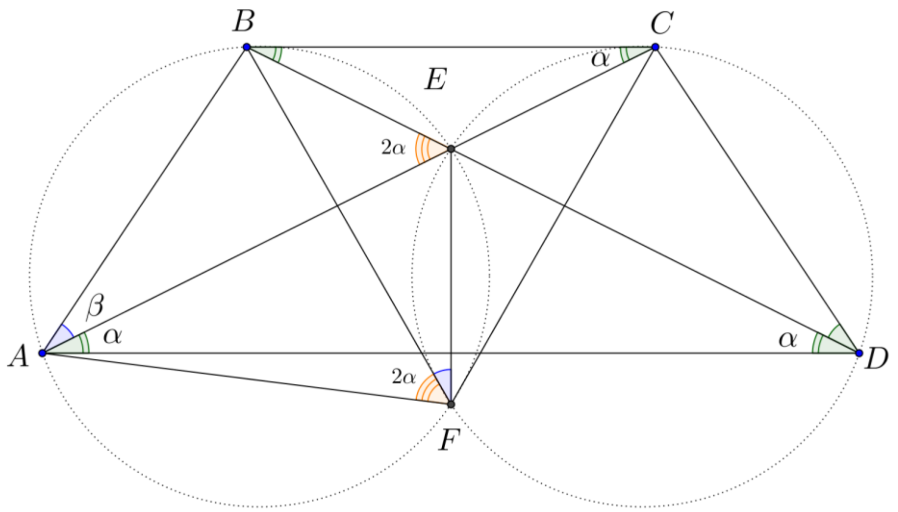
Ja $n=10^k$, kur k – naturāls skaitlis, tad $M(n)=M(10^k)=\underbrace{9...9}_{(10^k-1):9}1\underbrace{0...0}_{k}$. Ievērojam, kas skaitlis $9...910...0$ tiešām ir mazākais naturālais skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, jo devītnieki skaitļa sākumā nodrošina mazāko iespējamo skaitļa *garumu*, tātad arī mazāko skaitļa vērtību. Tā kā skaitlis $M(10^k)=9...91\underbrace{0...0}_{k}$ dalās ar 10^k un naturālo skaitļu k ir bezgalīgi daudz, tad ir arī bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu n, ka $M(n)$ dalās ar n.

11.4. Vienādsānu trapeces $ABCD$ sānu malas ir AB un CD, garākais pamats ir AD. Diagonāles AC un BD krustojas punktā E. Ap trijstūri ABE apvilkta riņķa līnija ω_1, bet ap CDE – riņķa līnija ω_2. Pierādīt, ka trapecei $ABCD$ apvilktās riņķa līnijas ω centrs atrodas ω_1 un ω_2 krustpunktā, kas atšķirīgs no punkta E!

Atrisinājums

1. risinājums. Riņķa līniju ω_1 un ω_2 otru krustpunktu apzīmējam ar F (skat. A23. att.). Tad ir jāpierāda, ka ω centrs ir punktā F. Izmantosim, ka četrstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs ir četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā.

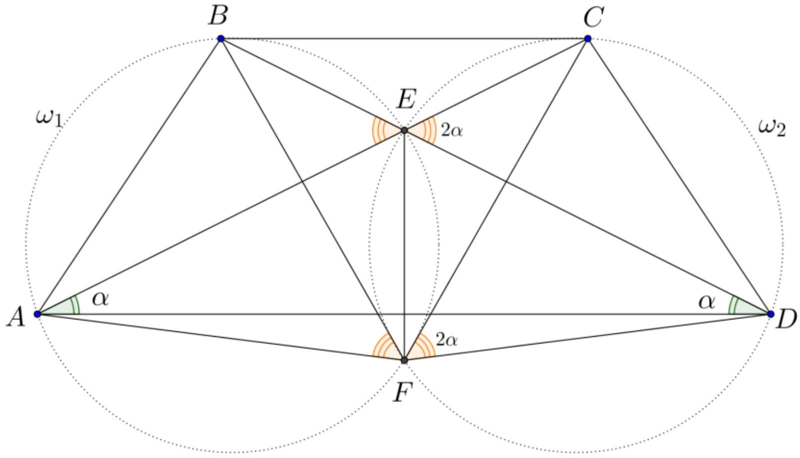
Tā kā $ABCD$ ir vienādsānu trapece, tad simetrijas dēļ EF ir malu AD un BC vidusperpendikuls. Apzīmējam $\angle EAD=\angle EDA=\alpha$ un $\angle BAE=\beta$. Tad no trijstūra iekšējo leņķu summas izriet, ka $\angle AED=180°-\angle EAD-\angle ADE=180°-2\alpha$ un no blakusleņķu īpašības $\angle AEB=2\alpha$. Punkti E un F atrodas uz riņķa līnijas ω_1, tāpēc $\angle AFB=\angle AEB=2\alpha$ un $\angle BAE=\angle BFE=\beta$ kā ievilktie leņķi, kas balstās attiecīgi uz viena un tā paša loka. Simetrijas dēļ $\angle FBC=\angle BCF=(180°-2\beta):2=90°-\beta$. No trijstūra ABC iegūstam, ka $\angle ABC=180°-\alpha-\beta$, tad $\angle ABF=180°-\alpha-\beta-(90°-\beta)=90°-\alpha$. No ΔBAF iegūstam, ka $\angle BAF=180°-(90°-\alpha)-2\alpha=90°-\alpha$. Līdz ar to ΔBAF ir vienādsānu trijstūris un punkts F atrodas uz trijstūra malas AB vidusperpendikula. Tātad punkts F ir četrstūrim $ABCD$ apvilktās riņķa līnijas ω centrs.



A23. att.

2. risinājums. Ar F apzīmējam riņķa līniju ω_1 un ω_2 otru krustpunktu (skat. A24. att.). Tā kā $ABCD$ ir vienādsānu trapece, tad simetrijas dēļ $\angle EAD=\angle EDA=\alpha$. Tad $\angle CED=\angle EDA+\angle EAD=2\alpha$ (kā trijstūra AED trešā leņķa AED ārējais leņķis). Apskatām, kādi leņķi balstās uz loka CD, pieņemot, ka arī trapecei $ABCD$ ir apvilkta riņķa līnija ω. Riņķa līnijā ω ievilktais leņķis CAD balstās uz loka CD, tam atbilstošā centra leņķa lielums ir 2α. Visi leņķi, kas balstās uz loka CD un kuru lielums ir 2α, atrodas uz ω_2. Tātad arī ω centrs atrodas uz ω_2.

Analoģiski pierāda, ka ω centrs atrodas uz ω_1. Tātad ω centrs atrodas riņķa līniju ω_1 un ω_2 krustpunktā – vai nu punktā E, vai punktā F. Riņķa līnijas ω centrs nevar būt punkts E, jo BE un AE tad būtu rādiusi, bet $BE \neq AE$ (vienādsānu trapeces diagonāles krustpunktā nedalās uz pusēm). Līdz ar to punkts F ir trapecei $ABCD$ apvilktās riņķa līnijas ω centrs.



A24. att.

11.5. Atrast funkcijas $f(x) = 8\sin x + 8\cos x - 12\sin x \cos x$ mazāko un lielāko vērtību!

Atrisinājums

Apzīmējam $t = \sin x + \cos x$. Tad

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x.$$

Tā kā $\sin 2x \leq 1$, tad $t^2 = 1 + \sin 2x \leq 2$. Līdz ar to $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Izmantojot apzīmējumus, pārrakstām doto funkciju: $F(t) = 8t - 6(t^2 - 1) = -6t^2 + 8t + 6$. Funkcijas $F(t)$ grafiks ir parabola, kuras zari ir vērsti uz leju, tāpēc tās vislielākā vērtība ir parabolas virsotnē: $t_0 = \dfrac{-8}{2 \cdot (-6)} = \dfrac{2}{3} \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ un $F(t_0) = -6 \cdot \dfrac{4}{9} + 8 \cdot \dfrac{2}{3} + 6 = \dfrac{26}{3}$.

Minimālā vērtība ir vienā no intervāla $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ galapunktiem:

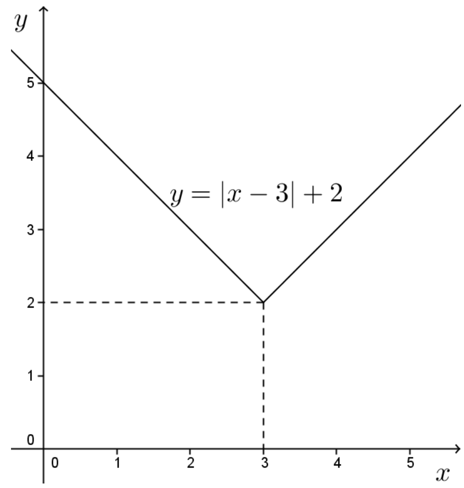
$F(-\sqrt{2}) = -12 - 8\sqrt{2} + 6 = -6 - 8\sqrt{2}$ vai $F(\sqrt{2}) = -12 + 8\sqrt{2} + 6 = -6 + 8\sqrt{2}$.

Tātad dotās funkcijas mazākā vērtība ir $(-6 - 8\sqrt{2})$ un lielākā vērtība ir $\dfrac{26}{3}$.

12.1. Uz funkcijas $y = |x - 3| + 2$ grafika atrast tādu punktu P, kura attālumu kvadrātu summa līdz koordinātu asīm būtu vismazākā!

Atrisinājums

Uzzīmējam funkcijas $y = |x - 3| + 2$ grafiku (skat. A25. att.).



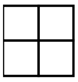
A25. att.

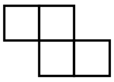
Tā kā funkcijas grafiks ir simetrisks pret taisni $x=3$, tad punkta P abscisa ir mazāka nekā 3 (t. i., punkts P atradīsies uz tās grafika daļas, ko nosaka funkcija $y=-x+5$). Punkta P koordinātas apzīmējam ar $(x;\, y)$. Tātad jānosaka izteiksmes x^2+y^2 vismazākā vērtība:

$$x^2+y^2=x^2+(-x+5)^2=2x^2-10x+25.$$

Funkcijas $f(x)=2x^2-10x+25$ grafiks ir parabola ar zaru vērsumu uz augšu. Parabolas virsotnes abscisa $x_0=\frac{10}{4}=2{,}5$ ir punkts, kurā funkcija sasniedz vismazāko vērtību. Tad $y_0=-x_0+5=2{,}5$ un punkta P koordinātas ir $(2{,}5;\, 2{,}5)$.

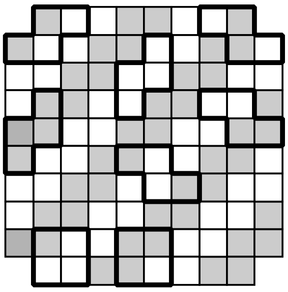
12.2. Taisnstūrim ar izmēriem 10×10 rūtiņas izgrieza visas četras stūra rūtiņas. Vai iegūto figūru var pārklāt ar vienu 7. att. redzamo figūru un 23 figūrām, kas redzamas 8. att.? Figūras drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.


7. att.


8. att.

Atrisinājums

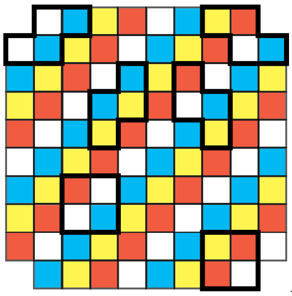
1. risinājums. Izkrāsosim iegūto figūru divās krāsās tā, kā parādīts A26. att. Lai kā arī tiktu novietota 8. att. figūra, tā vienmēr pārklāj pāra skaita melnās rūtiņas. Tātad 23 šādas figūras kopā pārklāj pāra skaita melnās rūtiņas. Tā kā 7. att. figūra pārklāj nepāra skaita melnās rūtiņas, tad visas 24 figūras kopā pārklāj nepāra skaita melnās rūtiņas, bet A26. att. figūra satur pāra skaita melnās rūtiņas, tātad prasīto nevar izdarīt.


A26. att.

2. risinājums. Izkrāsosim iegūto figūru četrās krāsās *diagonālveidā* (skat. A27. att.). Tā satur 24 katras krāsas rūtiņas. Lai kā novietotu 7. att. figūru, tā vienmēr pārklāj divas vienas krāsas rūtiņas un pa vienai rūtiņai no divām citām krāsām. Tad katrā krāsā nepārklātas paliek attiecīgi 22, 23, 23, 24 rūtiņas (divi pāra skaitļi, divi nepāra skaitļi). Iespējami divi gadījumi, kā novietot 8. att. figūru.

- Ja tā pārklāj pa vienai katras krāsas rūtiņai, tad nepārklāto rūtiņu skaits katrā krāsā samazinās par 1, tas ir, nepārklāto rūtiņu skaita paritāte katrā krāsā mainās uz pretējo. Tātad joprojām divām no četrām krāsām nepārklātas paliek nepāra skaita rūtiņas, divām – pāra skaita rūtiņas.
- Ja tā pārklāj divas rūtiņas no vienas krāsas, divas – no citas, tad katras krāsas nepārklāto rūtiņu skaits samazinās par pāra skaitli (vai nu par 2, vai 0) un nepārklāto rūtiņu skaita paritāte katrā krāsā saglabājas. Tātad joprojām divām no četrām krāsām nepārklātas paliek nepāra skaita rūtiņas, divām – pāra skaita rūtiņas.

Ja prasīto varētu izdarīt, tad katrā krāsā nepārklātas paliktu attiecīgi 0, 0, 0, 0 rūtiņas, bet tie visi ir pāra skaitļi. Tātad tas nav iespējams.


A27. att.

12.3. Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$, ja *a*, *b*, *c*, *d* ir pozitīvi skaitļi!

Atrisinājums

Lai pierādītu prasīto, pamatosim, ka pozitīviem skaitļiem ir spēkā $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

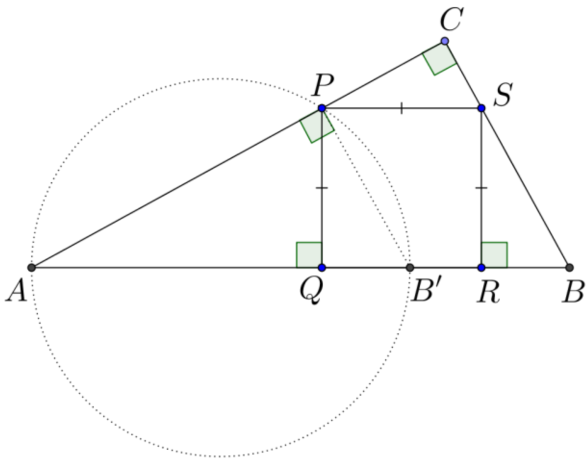
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\ |\cdot xy(x+y)>0\ \Rightarrow\ xy+y^2+x^2+xy\geq 4xy\ \Rightarrow\ x^2-2xy+y^2\geq 0\ \Rightarrow\ (x-y)^2\geq 0.$$

Tā kā iegūta patiesa nevienādība, tad arī $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ ir patiesa. Izmantojot šo nevienādību trīs reizes, iegūst prasīto: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}\right)+\frac{16}{d}\geq\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$.

12.4. Taisnleņķa trijstūrī *ABC* uz katetes *AC* atzīmēts punkts *P*, uz katetes *BC* – punkts *S*, uz hipotenūzas *AB* – punkti *R* un *Q* tā, ka *PSRQ* ir kvadrāts. Pierādīt, ka $AB\geq 3PS$. Kādā gadījumā $AB=3PS$?

Atrisinājums

1. risinājums. Tā kā $PS=QR$ un $AB=AQ+QR+RB$ (skat. A28. att.), tad pietiek pierādīt, ka $AQ+RB\geq 2PS$. Uz nogriežņa *AB* atliekam punktu B' tā, ka $PB'\parallel BC$. Tad $\Delta SRB=\Delta PQB$ pēc pazīmes $\ell m\ell$.



A28. att.

Tātad paliek pierādīt, ka $AB'\geq 2PQ$. Nogrieznis AB' ir diametrs riņķa līnijai, kas apvilkta ap $\Delta APB'$, jo $\angle APB'=\angle ACB=90°$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm. Nogrieznis *PQ* nav garāks kā šīs riņķa līnijas rādiuss, kas ir puse no diametra. Līdz ar to $AB'\geq 2PQ$ un arī $AB\geq 3PS$. Vienādība iespējama tikai tad, kad *PQ* ir vienāds ar riņķa līnijas rādiusu. Tādā gadījumā $\Delta APB'$ ir vienādsānu trīsstūris, tāpēc arī ΔACB ir vienādsānu, jo $\angle CAB=45°$. Tātad vienādība iespējama tikai tad, ja $AC=CB$.

2. risinājums. Kvadrāta malas garumu pieņemsim par vienu vienību $PS=SR=RQ=PQ=1$, tad jāpierāda, ka $AB\geq 3$. Ievērojam, ka $AB=AQ+QR+RB$ (skat. Axxx. att.). Apzīmējam $\angle CAB=\alpha$. No ΔAPQ iegūst, ka $AQ=\frac{1}{tg\alpha}$ un no ΔRSB iegūst, ka $AQ=tg\alpha$. Līdz ar to

$$AB=\frac{1}{tg\alpha}+1+tg\alpha=\frac{tg^2\alpha+tg\alpha+1}{tg\alpha}=\frac{tg^2\alpha-2tg\alpha+1+3tg\alpha}{tg\alpha}=\frac{(tg\alpha-1)^2+3tg\alpha}{tg\alpha}\geq\frac{3tg\alpha}{tg\alpha}=3,$$

jo $tg\alpha\neq 0$ un $(tg\alpha-1)^2\geq 0$.

Vienādība ir spēkā, ja $(tg\alpha-1)^2=0$ jeb $tg\alpha=1$. Tā kā α ir trijstūra leņķis, tad $\alpha=45°$, kas nozīmē, ka ΔACB ir vienādsānu. Tātad vienādība iespējama tikai tad, ja $AC=CB$.

12.5. Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus (a, b, c) tādus, ka $a \ge b \ge c \ge 2$ un $ab-1$ dalās ar c, $bc-1$ dalās ar a, $ac-1$ dalās ar b.

Atrisinājums

No dotā izriet, ka $(ab-1)(bc-1)(ac-1)$ dalās ar abc. Atverot iekavas iegūst, ka $a^2b^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 + ab + bc + ac - 1$ dalās ar abc. Tā kā pirmie četri saskaitāmie katrs dalās ar abc, tad

$$ab + bc + ac - 1 \text{ jādalās ar } abc. \tag{1}$$

Tas nozīmē, ka

$$ab + bc + ac - 1 \ge abc. \tag{2}$$

No otras puses, tā kā $a \ge b \ge c$, tad

$$ab + bc + ac - 1 < ab + ab + ab = 3ab. \tag{3}$$

No nevienādībām (2) un (3) iegūst, ka $3ab > abc$, tātad $c < 3$. Tā kā no dotā $c \ge 2$, tad vienīgā iespējamā vērtība ir $c = 2$. Ievietojot to (1), iegūstam $ab + 2(a+b) - 1$ jādalās ar $2ab$. No (3) izriet, ka $ab + 2(a+b) - 1 < 3ab$, tātad vienīgā iespējamā izteiksmes $ab + 2(a+b) - 1$ vērtība, lai tā dalītos ar $2ab$, ir $2ab$. Tātad $ab + 2(a+b) - 1 = 2ab$, no kurienes $ab - 2a - 2b + 4 = 3$ jeb $(a-2)(b-2) = 3$. No dotā izriet, ka abi reizinātāji ir pozitīvi un $a - 2 \ge b - 2$, tātad $a - 2 = 3$ un $b - 2 = 1$, no kurienes $a = 5$ un $b = 3$. Pārbaude parāda, ka skaitļu trijnieks (5, 3, 2) ir uzdevuma atrisinājums.