

INVARIANTU METODE

Teorija un piemēri 5.-8. klasei, gatavojoties Novada olimpiādei

Materiāla izstrādē izmantota grāmata A. Andžāns, A. Reihnova, L. Ramāna, B. Johannessons "Invariantu metode" – Rīga, 1997. (Vairāk skat. <http://nms.lu.lv/biblioteka/tematiskie-materiali/>)

Invariants – tas, kas paliek nemainīgs (kādā norisē, kādos apstākļos).

Piemēram,

- mašīnas braukšanas ātrums visā ceļa posmā nav nemainīgs lielums, jo, uzsākot braucienu, tās ātrums ir nulle, bet kaut kādā ceļa posmā tas ir nemainīgs jeb invariants;
- pulksteņa rādītāja spicē gala attālums līdz centram, kur tas ir piestiprināts, ir nemainīgs jeb invariants, bet spicē gala attālums līdz skaitlim 12, pulksteņa rādītājiem kustoties, nav nemainīgs.



Invariantu metode bieži ir lietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu darbību izpilde ar dotajiem lielumiem, un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu **NAV** iespējams iegūt. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties pēc tālāk aprakstītā plāna.

Invariantu metode

Atrast piemērotu īpašību, kura

- 1) piemīt sākumā dotajiem lielumiem;
- 2) ir invarianta, tas ir, saglabājas, veicot pieļaujamās darbības;
- 3) nepiemīt tam lielumam, kas būtu jāiegūst galarezultātā.

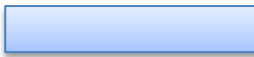

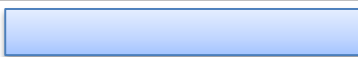

Invariants atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, paritāte (būt pāra vai nepāra skaitlim), dalāmība ar 3, dalāmība ar 4, periodiskums.

1. piemērs

Sākumā bija 10 papīra gabali. Dažus no tiem sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Visus iegūtos gabalus sajauc un dažus no tiem atkal sagrieza vai nu 5, vai 7 daļās. Vai, tādā veidā turpinot, var iegūt tieši 999 papīra gabalus?

Atrisinājums

Aplūkosim, kā izmainās kopējais gabalu skaits, atkarībā no tā, cik daļās tiek sagriezts viens gabals.

| | | |
|---|--|---|
|  |  | Kopējais gabalu skaits palielinās par 4 |
| Bija 1 gabals | Ieguva 5 gabalus | |
|  |  | Kopējais gabalu skaits palielinās par 6 |
| Bija 1 gabals | Ieguva 7 gabalus | |

Ievērojam, ka sākumā bija doti 10 papīra gabali – *pāra skaitlis*.

Ja papīra gabalu sagriež

- 5 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 4 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli;
- 7 daļās, tad kopējais gabalu skaits palielinās par 6 (par pāra skaitli), tātad tas bija pāra skaitlis un *paliek pāra skaitlis*, jo, saskaitot divus pāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

Tātad kopējais papīra gabalu skaits *vienmēr būs pāra skaitlis*. Tā kā 999 ir *nepāra skaitlis*, tad tieši 999 papīra gabalus iegūt nevarēs. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – kopējais papīra gabalu skaits vienmēr ir pāra skaitlis.

2. piemērs

Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 10. Vienā gājienā var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt pa vieniniekam. Vai, atkārtojot šādus gājienu, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

Atrisinājums

Sākumā doto skaitļu summa ir *nepāra skaitlis*: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

Katrā gājienā, pieskaitot pa vieniniekam diviem skaitļiem, visu skaitļu summa palielinās par 2 (par *pāra skaitli*). Pie nepāra skaitļa pieskaitot pāra skaitli, iegūst *nepāra skaitli*. Tātad visu skaitļu summa pēc katra gājiena paliek *nepāra skaitlis*.

Beigās prasīts iegūt desmit vienādus skaitļus, bet desmit vienādu skaitļu summa $10 \cdot x$ ir *pāra skaitlis*.

Tātad nevar panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – visu skaitļu summa vienmēr ir nepāra skaitlis.

3. piemērs

Pamestā mājā dzīvo 2016 spoki. Spoku ķērājs vienā reizē var noķert vai nu tieši 33, vai tieši 17 spokus, bet tad uzreiz uzrodas attiecīgi vai nu 48, vai 14 jauni spoki. Vai iespējams, ka kādā brīdī šajā mājā būs tieši viens spoks?

Atrisinājums

Aplūkosim, kā izmainās kopējais spoku skaits, atkarībā no tā, cik spoki tiek noķerti.

| Noķer | Uzrodas | Kopējais spoku skaits |
|-------|---------|-----------------------|
| 33 | 48 | palielinās par 15 |
| 17 | 14 | pamazinās par 3 |

Ievērojam, ka kopējais spoku skaits izmainās par skaitli, kas dalās ar 3.

Atceries!

Viens skaitlis dalās ar otru skaitli, ja šos skaitļus var izdalīt bez atlikuma.

Sākumā bija 2016 spoki – skaitlis, kas dalās ar 3, jo skaitļa 2016 ciparu summa ir $2 + 0 + 1 + 6 = 9$, kas dalās ar 3, tātad arī pats skaitlis dalās ar 3.

Ja pie skaitļa, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, vienmēr iegūst skaitli, kas dalās ar 3, jo $3k \pm 3m = 3 \cdot (k \pm m)$.

Tātad kopējais spoku skaits pēc katra ķeriena dalās ar 3. Tā kā skaitlis 1 nedalās ar 3, tad nav iespējams, ka kādā brīdī mājā būs tieši viens spoks. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – kopējais spoku skaits vienmēr dalās ar 3.

Iegaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums „Vai var...?”, „Vai iespējams...?” un atbilde ir

- „JĀ”, tad risinājumā jāparāda piemērs, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- „NĒ”, tad ar dažu atsevišķu piemēru apskatīšanu, kuros neizdodas panākt vēlamo, nepietiek, bet ir vajadzīgs pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem, ka tiešām nekādā gadījumā prasīto nebūs iespējams iegūt.

INVARIANTU METODE

Teorija un piemēri 9.-12. klasei

Materiāla izstrādē izmantota grāmata A. Andžāns, A. Reihanova, L. Ramāna, B. Johannessons "Invariantu metode" – Rīga, 1997. (Vairāk skat. <http://nms.lu.lv/biblioteka/tematiskie-materiali/>)

INVARIANTA LIELUMA JĒDZIENS

Par **invariantiem lielumiem** sauc tādus lielumus, kuri kādā procesā ir nemainīgi.

Ar vārdiem **invarianta īpašība** apzīmē īpašību, kas kādā procesā saglabājas, nemainās. Piemēram, mašīnas braukšanas ātrums visā ceļa posmā nav nemainīgs lielums, jo, uzsākot braucienu, tās ātrums ir nulle, bet kaut kādā ceļa posmā tas ir nemainīgs, t.i., invariants. Šūpojoties šūpolēs, attālums no šūpolēm līdz stienim, uz kura šūpoles ir pakārtas, ir invariants lielums, bet attālums no šūpolēm līdz šūpoļu balstiem nav invariants lielums.

INVARIANTU METODES BŪTĪBA

Ir uzdevumi, kuros ir prasīts noskaidrot, vai, izpildot noteiktas darbības, var iegūt prasīto rezultātu. Ja atbilde ir "NĒ", tad pierādījumā var mēģināt lietot invariantu metodi. Uzdevuma risinājumā var vadīties pēc šāda plāna:

Jāatrod piemērota īpašība, kura

- 1) piemīt sākumā dotajiem lielumiem;**
- 2) ir invarianta, t.i., saglabājas, veicot pieļaujamās darbības;**
- 3) nepiemīt tam lielumam, kas jāiegūst galarezultātā.**

Par **invarianto īpašību** var izmantot, piemēram, elementu skaitu, summu, starpību, reizinājumu, paritāti (būt pāra vai nepāra skaitlim), dalāmību ar 3, dalāmību ar 4, periodiskumu.

PARITĀTE

Apskatīsim uzdevumus, kuru atrisināšanas pamatā ir viens apsvērums – "**būt pāra vai nepāra skaitlim**".

1. uzdevums

Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Četras rūtiņas nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindiņā un katrā kolonnā ir tieši viena melna rūtiņa. Vienā gājienā atļauts izvēlēties vienu rindiņu vai vienu kolonnu un mainīt tajā krāsojumu uz pretējo – melnās rūtiņas pārkrāsot baltas, bet baltās – melnas.

Vai var gadīties, ka kvadrātā paliek tieši 3 melnas rūtiņas?

Atrisinājums

Uzdevuma risinājumā gan rindīņas, gan kolonnas saucsim par līnijām.

Pieņemsim, ka kādā gājienā tiek izmainīts rūtiņu krāsojums līnijā t . Tabulā apskatīsim, kā gājiena rezultātā mainās melno rūtiņu skaits līnijā t un arī visā kvadrātā.

Apskatīsim visus gadījumus, kā var izvietot melnās rūtiņas uz līnijas t :

| melno rūtiņu skaits līnijā t pirms gājiena | melno rūtiņu skaits līnijā t pēc gājiena | melno rūtiņu skaita izmaiņa (starpība) |
|--|--|--|
| 4 | 0 | - 4 |
| 3 | 1 | - 2 |
| 2 | 2 | 0 |
| 1 | 3 | + 2 |
| 0 | 4 | + 4 |

Secinām, ka jebkura gājiena rezultātā melno rūtiņu skaits kvadrātā mainās par pāra skaitli. Tā kā uzdevuma sākumā ir 4 melnās rūtiņas (pāra skaitlis), tad melno rūtiņu skaits nevar kļūt vienāds ar 3 (nepāra skaitlis). Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – melno rūtiņu skaits ir **pāra** skaitlis.

2. uzdevums

Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, ..., 2014. Vienā gājienā atļauts nodzēst jebkurus divus blakus esošus skaitļus un to vietā uzrakstīt šo skaitļu starpību.

Vai iespējams, ka, veicot atļautos gājienu, uz tāfeles paliek tikai viens vienīgs skaitlis 0?

Atrisinājums

Izmantojot aritmētiskās progresijas locekļu summas formulu, aprēķinām uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summu:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2014 = \frac{(1 + 2014) \cdot 2014}{2} = \frac{2015 \cdot 2014}{2} = 2015 \cdot 1007.$$

Šī summa ir nepāra skaitlis.

Ja tiek nodzēsti divi blakus esoši skaitļi a un b , $a > b$, un to vietā uzrakstīta šo skaitļu starpība $a - b$, tad uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa samazinās par

$$(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b, \text{ t. i., par pāra skaitli.}$$

Ja visu sākumā doto skaitļu summa ir NEPĀRA skaitlis, bet, nodzēšot divus blakus esošus skaitļus, uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa samazinās par pāra skaitli, tad, katreiz atņemot no nepāra skaitļa pāra skaitli, iegūsim NEPĀRA skaitli. Līdz ar to skaitli 0 nevar iegūt, jo nulle ir pāra skaitlis. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – skaitļu summa ir **nepāra** skaitlis.

3. uzdevums

Uz displeja ekrāna uzrakstīta burtu virkne XXOXOO. Burtu grupu XO var aizstāt ar OOXXOO, bet burtu grupu OOX var aizstāt ar burtu X. Vai, izpildot šādas operācijas, var iegūt burtu virkni OXOXOXOXOXOXO?

Atrisinājums

Aplūkosim burtu X un burtu O skaita starpību.

Sākumā virknē šī burtu skaita starpība ir nulle, bet beigu virknē tā ir (-1) .

Izdarot pirmā veida aizvietošanu, šī starpība samazinās par 2, bet, izdarot otrā veida aizvietošanu, tā palielinās par 2 (skat. tabulu).

| | X skaits | O skaits | X un O skaita starpība | X skaits | O skaits | X un O skaita starpība | Starpības izmaiņas |
|-----------|----------|----------|------------------------|----------|----------|------------------------|--------------------|
| XO→OOXXOO | 1 | 1 | 0 | 2 | 4 | -2 | -2 |
| OOX→X | 1 | 2 | -1 | 1 | 0 | 1 | +2 |

Redzam, ka ar katru pieļaujamo operāciju starpība starp burtu O skaitu un burtu X skaitu mainās par pāra skaitli. Tā kā sākotnējā burtu virknē šī starpība ir nulle (pāra skaitlis), tad tā nevar beigu virknē kļūt vienāda ar nepāra skaitli (-1). Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – X un O skaita starpība virknēs, ko var iegūt uz ekrāna, ir **pāra** skaitlis.

DALĀMĪBA UN SPECIFISKAS ATLIKUMU VĒRTĪBAS

Dažreiz par invariāto īpašību var izvēlēties, piemēram, īpašību “**dalīties ar 3**”, “**dalot ar 3, dot atlikumu 1**”, “**dalot ar 3, dot atlikumu 2**”, “**dalīties ar 4**” utt.

Dalāmības pazīmes:

- skaitlis dalās ar 2 (vai 5), ja tas beidzas ar pāra ciparu (ar 0 vai 5);
- skaitlis dalās ar 3 (vai 9), ja tā ciparu summa dalās ar 3 (vai 9);
- skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

Atlikums, ko iegūst, dalot naturālu skaitli ar 3 (vai 9), ir vienāds ar atlikumu, ko iegūst, dalot ar 3 (vai 9) šī skaitļa ciparu summu.

4. uzdevums

Ar naturālu skaitli drīkst izdarīt šādas operācijas:

- reizināt ar 2;
- dalīt ar 2, ja skaitlis ir pāra skaitlis;
- pierakstīt galā to pašu skaitli (piemēram, ar šo operāciju no skaitļa 2015 var iegūt skaitli 20152015).

Vai ar šīm operācijām, izdarot tās vairākas reizes, no skaitļa 24 var iegūt skaitli 2015?

Atrisinājums

Izpētīsim vispirms abus skaitļus: doto un to, kuru jāiegūst. Skaitlim 24 izpildās īpašība “dalās ar 3”, bet skaitlim 2015 šī īpašība nepiemīt.

Pierādīsim: ja kāds skaitlis dalās ar 3, tad skaitlis, kas no tā tiek iegūts ar šajā uzdevumā pieļaujamajām operācijām, arī dalīsies ar 3. Tiešām:

- ja n dalās ar 3, tad arī $2n$ dalās ar 3,
- ja pāra skaitlis $2n$ dalās ar 3, tad n dalās ar 3,
- apgalvojums par trešo operāciju izriet no dalāmības pazīmes ar 3. Ja skaitļa \overline{nn} ciparu summa dalās ar 3, tad arī jauniegūtā skaitļa \overline{nn} ciparu summa dalās ar 3, jo tā ir divreiz lielāka nekā sākotnējā skaitļa \overline{n} ciparu summa. Tātad arī pats jauniegūtais skaitlis \overline{nn} dalās ar 3.

Tā kā uzdevumā dotais skaitlis 24 dalās ar 3, tad arī skaitļi, kurus var iegūt no 24, dalās ar 3. Bet skaitlis 2015 ar 3 nedalās, tātad ar uzdevumā dotajām operācijām skaitli 2015 nevarēs iegūt. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – visi iegūtie skaitļi **dalās ar 3**.

5. uzdevums

Uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 2, 3, 4, 5. Atļauts izvēlēties dažus no tiem un sastādīt no tiem skaitli A . Pēc tam skaitli A reizina ar 13, un ciparus, kurus iegūst reizināšanas rezultātā, uzraksta uz tāfeles izvēlēto ciparu vietā. (Piemēram, izvēloties ciparus 2, 3, 4, varam no tiem sastādīt skaitli $A = 324$ un iegūt skaitli $13 \cdot A = 13 \cdot 324 = 4212$, pie tam cipars 2 tiek iegūts divas reizes. Tagad uz tāfeles ir uzrakstīti cipari 1, 2, 2, 4, 5).

Vai ar aprakstīto operāciju palīdzību var panākt, ka uz tāfeles būs uzrakstīti cipari:

2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 ?

Atrisinājums

Izmantosim, ka naturāls skaitlis, dalot to ar 3, dod tādu pašu atlikumu, kādu dod šī skaitļa ciparu summa, dalot to ar 3.

Ja vienas operācijas izpildes sākumā izvēlēto ciparu summa, dalot ar 3, dod atlikumu r , tad tādu pašu atlikumu r dod arī no šiem cipariem izveidotais skaitlis A . Tā kā $13A = A + 12A$, un $12A$ dalās ar 3, tad tādu pašu atlikumu r , dalot ar 3, dod arī jauniegūtais skaitlis $13A$; tātad tādu pašu atlikumu r , dalot ar 3, dod arī to ciparu summa, kurus operācijas izpildes beigās uzraksta uz tāfeles sākumā izvēlēto ciparu vietā. Tātad operācijas izpildes gaitā nemainās uz tāfeles uzrakstīto ciparu summas atlikums, dalot to ar 3.

Ievērosim, ka sākumā uzrakstīto ciparu summa ir 14, un tā dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad visām ciparu virknēm, kas parādās uz tāfeles, ir atlikums 2, dalot to summu ar 3.

Bet galarezultātā prasītās virknes ciparu summa ir $2 \cdot (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 2 \cdot 27 = 54$; tā dod atlikumu 0, dalot ar 3.

Tātad prasīto ciparu virkni nevar iegūt. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – uz tāfeles esošo ciparu summa, **dalot to ar 3, dod atlikumu 2.**

PERIODISKUMS

6. uzdevums

Bezgalīgu skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 3; 1; 4; 5; 9; 4; 3; 7; 0; 7; 7; ... veido pēc šāda likuma: pirmie divi skaitļi ir 1 un 2, bet katrs nākamais skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šajā skaitļu virknē kaut kur blakus atrodas skaitļi 2 un 4?

Atrisinājums

Pāra skaitļus apzīmēsim ar p , bet nepāra skaitļus – ar n .

Ievērojam, ka $n + n = n$, $n + p = n$, $p + n = n$, $p + p = p$.

Tā kā virknes locekļus nosaka divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars, tad tā veidojas šādi: $n; p; n; n; p; n; n; p; n; n; p; n; \dots$

Šajā virknē periodiski atkārtojas grupa $(n; p; n)$. Virknē nekur blakus neatrodas divi pāra skaitļi, tātad šajā virknē nekur blakus neatradīsies skaitļi 2 un 4. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – virknē **periodiski atkārtojas grupa $(n; p; n)$.**

SAREŽĢĪTĀKI INVARIANTI

7. uzdevums

Rindā uzrakstīti 2015 vieninieki. Atļauts nodzēst jebkurus divus uzrakstītus skaitļus a un b un to vietā uzrakstīt vienu jaunu skaitli $\frac{a+b}{4}$. Tā turpina, kamēr paliek uzrakstīts viens skaitlis. Vai var gadīties, ka tas ir mazāks nekā 0,0001?

Atrisinājums

Pieņemsim, ka tiek nodzēsti skaitļi a un b un to vietā uzrakstīts skaitlis $\frac{a+b}{4}$.

Pierādīsim, ka $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{\frac{a+b}{4}}$ (1), t. i., katra gājiena rezultātā visu uzrakstīto skaitļu apgriezto

lielumu summa nepalielinās.

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, pakāpeniski iegūstam:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{ab} &\geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī nevienādība (1) ir patiesa.

Sākumā visu uzrakstīto skaitļu apgriezto lielumu summa ir $2015 \cdot \frac{1}{1} = 2015$; tātad arī beigās tā

nav lielāka kā 2015. Ja beigās palikušo vienīgo skaitli apzīmējam ar x , tad šī summa ir $\frac{1}{x}$; tāpēc

$\frac{1}{x} \leq 2015$ un $x \geq \frac{1}{2015} > \frac{1}{10000} = 0,0001$. Tātad beigās uz tāfeles uzrakstītais skaitlis nevar būt

mazāks nekā 0,0001. Uzdevums atrisināts.

INVARIANTS – visu ierakstīto **skaitļu apgriezto lielumu summa vienmēr lielāka vai vienāda ar 2015**.

PAR KĀDU BIEŽI SASTOPAMU KĻŪDU

Gadījumos, kad zināms, ka kāda īpašība piemīt sākotnējam lielumam, saglabājas izpildāmo gājienu rezultātā un piemīt arī beigās vajadzīgajam rezultātam, tad šī informācija vien vēl **neļauj secināt**, vai vajadzīgais beigu rezultāts iegūstams no sākotnējā lieluma, izpildot pieļautos gājienu. Tādos gadījumos uzdevuma risināšanai jāmeklē citi ceļi – varbūt citi invarianti, varbūt veids, kā iegūt vajadzīgo galarezultātu, u.t.t.

Ja izdodas atrast īpašību, kas

- 1) piemīt sākumā dotajiem lielumiem,
- 2) ir invarianta, t.i., saglabājas, veicot pieļaujamās operācijas,
- 3) piemīt tiem lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā,

tad no tā vien vēl **nevar secināt**, ka galarezultātā vajadzīgos lielumus tiešām varēs iegūt.

8. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 2016. Ar vienu gājienu tam var vai nu pieskaitīt 12, vai atņemt 18. Vai, daudzkārt izdarot šādus gājienu, var iegūt skaitli 1000?

Kurš no risinājumiem ir pareizs?

Jānīša risinājums. Sāpumā dotais skaitlis ir pāra skaitlis. Gan 12, gan 18 arī ir pāra skaitļi. Pāra skaitlim pieskaitot vai no tā atņemot pāra skaitli, iegūst pāra skaitli. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai pāra skaitļi. Arī beigās iegūstamais skaitlis 1000 ir pāra skaitlis. Tātad to **var** iegūt ar norādītajām darbībām.

Pēterīša risinājums. Sāpumā dotais skaitlis dalās ar 3. Gan 12, gan 18 arī dalās ar 3. Ja skaitlim, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, tad atkal iegūst skaitli, kas dalās ar 3. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai tādi skaitļi, kas dalās ar trīs. Bet beigās iegūstamais skaitlis 1000 ar 3 nedalās. Tātad to **nevar** iegūt ar norādītajām darbībām.

Pēterīša spriedums ir pareizs, bet Jānīša spriedums ir kļūdainis.

Jānītis savā risinājumā koncentrējās uz īpašību “būt pāra skaitlim”. Viņš atzīmējis, ka šī īpašība piemīt gan visiem skaitļiem, kurus var iegūt, gan arī skaitlim 1000, par kura iegūšanas iespējām jautāts uzdevumā. Tātad Jānītis konstatējis, ka ar skaitļa paritāti saistīti apsvērumi **netraucē** skaitļa 1000 iegūšanai. Bet no tā vēl neizriet, ka 1000 iegūšanai netraucē nekādi citi apsvērumi! Gluži otrādi, kā to savā risinājumā atradis Pēterītis, dalāmība ar 3 ir apsvērumi, kas parāda, ka 1000 ar atļautajiem gājieniem nevar iegūt.

Situācija ir apmēram tāda pati, kāda rastos, ja Jānītim un Pēterītim būtu uzdots noskaidrot, vai celiņu cauri džungļiem no Mumbo ciema uz Tumbo ciemu neapdraud nekādas briesmas. Jānītis, ķīmiski analizējot gaisa sastāvu, nekļūdīgi noskaidro, ka celiņa tuvumā nav neviena lauvas, un no tā secina, ka var droši doties ceļā. Turpretī Pēterītis koncentrējas uz jaguāru meklēšanu un konstatē, ka 10 metrus no celiņa guļ vesela jaguāru saime. Kura zēna secinājums ir pareizs, varat saprast paši.