Baltijas ceļš

2014. gada 8. novembris, Viļņa

Language: **Latvian**

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

1. Pierādīt, ka

$$\cos(56^\circ) \cdot \cos(2 \cdot 56^\circ) \cdot \cos(2^2 \cdot 56^\circ) \cdot \ldots \cdot \cos(2^{23} \cdot 56^\circ) = \frac{1}{2^{24}}.$$

2. Reāliem skaitļiem $a_0, a_1, \ldots, a_N$ ir spēkā $a_0 = a_N = 0$ un

$$a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = a_i^2$$

visiem $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Pierādīt, ka $a_i \leqslant 0$ visiem $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

3. Pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c izpildās $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

4. Atrast visas funkcijas f, kas definētas visiem reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības un kurām

$$f(f(y)) + f(x-y) = f(xf(y) - x)$$

izpildās visiem reāliem x un y.

5. Reāli pozitīvi skaitļi a, b, c un d apmierina vienādības

$$a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + bc \qquad \text{un} \qquad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Atrast visas iespējamās izteiksmes $\frac{ab+cd}{ad+bc}$ vērtības.

6. Cik dažādos veidos var nokrāsot 16 vienā rindā stāvošus ķeblīšus, katru sarkanā vai zaļā krāsā, tā, lai vienā krāsā nokrāsotu blakusesošu ķeblīšu skaits vienmēr būtu nepāra skaitlis.

7. Apzīmēsim skaitļu $1, 2, \ldots, 30$ permutāciju ar $p_1, p_2, \ldots, p_{30}$. Cik ir tādu permutāciju, kurām izpildās vienādība $\sum\limits_{k=1}^{30} |p_k - k| = 450$?

8. Alberts un Beāte spēlē sekojošu spēli. Sākumā zilajā bļodā atrodas 100 sarkanas bumbiņas, bet sarkanajā bļodā — 100 zilas bumbiņas. Katrā gājienā spēlētājs izdara vienu no sekojošām darbībām:

a) Pārliek divas sarkanās bumbiņas no zilās bļodas uz sarkano.

b) Pārliek divas zilās bumbiņas no sarkanās bļodas uz zilo.

c) Paņem divas dažādas krāsas bumbiņas no jebkuras (vienas) bļodas un aizmet prom.

Alberts sāk un tālāk spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena pirmo reizi spēles laikā zilajā bļodā vairs nepaliek neviena sarkanā bumbiņa, vai sarkanajā bļodā nepaliek neviena zilā bumbiņa. Noskaidrojiet, kuram no spēlētājiem ir uzvaroša stratēģija.

9. Kādu mazāko skaitu rūtiņu var iezīmēt $n \times n$ rūtiņu laukumā tā, lai katram $m > \frac{n}{2}$ jebkuram šajā laukumā esošam $m \times m$ rūtiņu kvadrātam katra no abām tā diagonālēm saturētu vismaz vienu iezīmētu rūtiņu?

10. Kāda valstī ir 100 lidostas. "Super-Air" starp dažām lidostām veic tiešos lidojumus (abos virzienos). Par lidostas *noslogojumu* sauc lidostu skaitu, ar kurām to savieno Super-Air tiešie lidojumi. Jauna lidsabiedrība, "Concur-Air", veic lidojumu (abos virzienos) starp divām lidostām tad un tikai tad, ja to abu noslogojumu summa ir vismaz 100. Izrādās, ka ar Concur-Air lidojumiem var apceļot visas lidostas, katrā iegriežoties tieši vienu reizi un beigās atgriežoties sākotnējā lidostā. Pierādīt, ka tādā gadījumā arī ar Super-Air lidojumiem var apceļot visas lidostas, katrā iegriežoties tieši vienu reizi un beigās atgriežoties sākotnējā lidostā.

11. Šaurleņķa trijstūrim ABC apvilkta riņķa līnija Γ. Perpendikuls, kas no C vilkts pret AB, krusto AB punktā D un tālāk Γ punktā E. Leņķa C bisektrise krusto AB punktā F un tālāk Γ punktā G. Taisne GD vēlreiz krusto Γ punktā H; taisne HF vēlreiz krusto Γ punktā I. Pierādīt, ka $AI = EB$.

12. Dots trijstūris ABC. Malas AB viduspunkts ir M, bet loka BC (kurš nesatur A) viduspunkts ir T. Punkts K atrodas trijstūra ABC iekšienē, un $MATK$ ir vienādsānu trapece, kurai $AT \parallel MK$. Pierādīt, ka $AK = KC$.

13. Kvadrāts $ABCD$ ievilkts riņķa līnijā ω, uz īsākā loka AB izvēlēts punkts P. Taišņu CP un BD krustpunkts ir R, bet taišņu DP un AC — S. Pierādīt, ka trijstūru ARB un DSR laukumi ir vienādi.

14. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāle BD ir leņķa ABC bisektrise. Trijstūrim ABC apvilktā riņķa līnija krusto malas AD un CD attiecīgi punktos P un Q. Taisne, kas caur D novilkta paralēli AC, krusto taisnes BC un BA attiecīgi punktos R un S. Pierādīt, ka punkti P, Q, R un S atrodas uz vienas riņķa līnijas.

15. Izliekta četrstūra $ABCD$ leņķu A un C summa ir mazāka par $180°$. Pierādīt, ka

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC < AC(AB + AD).$$

16. Noskaidrojiet, vai $712! + 1$ ir pirmskaitlis.

17. Vai eksistē dažādi racionāli skaitļi x, y un z, tādi, ka

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} = 2014?$$

18. Dots pirmskaitlis p un naturāls skaitlis n. Atrast četrinieku (a_1, a_2, a_3, a_4), $a_i \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, skaitu, kuriem $a_1a_2 + a_3a_4 + 1$ dalās ar p^n.

19. Naturāli skaitļi m un n ir savstarpēji pirmskaitļi. Atrodiet visas iespējamās izteiksmes $\mathrm{LKD}(2^m - 2^n, 2^{m^2+mn+n^2} - 1)$ vērtības.

20. Aplūkosim naturālu skaitļu virkni $a_1, a_2, a_3, \ldots$, tādu, ka visiem $k \geqslant 2$ izpildās

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2015^i},$$

kur 2015^i ir lielākā skaitļa 2015 pakāpe, ar ko dalās $a_k + a_{k-1}$. Pierādīt, ka, ja šī virkne ir periodiska, tad tās perioda garums dalās ar 3.