

## Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

### 9. klase

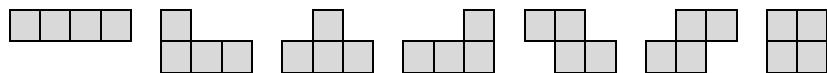
1. Atrast visus tādus naturālus skaitļus  $n$  un  $m$ , kuriem  $\frac{2015}{n^4 - m^4}$  arī ir naturāls skaitlis!

2. Pierādīt, ka, izmantojot

a) visas septiņas dotās figūras (skat 1. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri;

b) sešas no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri.

Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt, bet nedrīkst apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.



1. att.

3. Aija izvēlas naturālu skaitli  $n \leq 100$  un veido skaitļu virkni, kur katru nākamo virknes locekli iegūst pēc šāda likuma:

- ja  $2n \leq 100$ , tad virknes nākamais loceklis ir  $2n$ ;
- ja  $2n > 100$ , tad virknes nākamais loceklis ir  $2n - 100$ .

Ja virknē vēl kādreiz parādās skaitlis  $n$ , tad skaitli  $n$  sauksim par *patīkamu*. Cik pavisam ir *patīkamu* skaitļu, kas nepārsniedz 100?

Piemēram, skaitlis 40 ir *patīkams*, jo 40; 80; 60; 20; 40; ..., bet 25 – nav, jo 25; 50; 100; 100; ... (tālāk virknē nav skaitļu, kas atšķirīgi no 100).

4. Trijstūrī  $ABC$  novilkta bisektrise  $BL$  ( $L$  atrodas uz malas  $AC$ ), tā krusto taisni, kas no  $A$  vilkta paralēli  $BC$ , punktā  $K$ . Zināms, ka  $LK = AB$ . Pierādīt, ka  $AB > BC$ !

5. Kāda ir izteiksmes  $a^{20} + a^4 + \frac{1}{a^4 + 1}$  mazākā iespējamā vērtība, ja  $a$  ir reāls skaitlis?

## Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

### 10. klase

#### 1. Kvadrātvienādojuma

$$(1 + \sqrt{5})x^2 - 4\sqrt{\frac{7}{3 + \sqrt{5}}} \cdot (1 + \sqrt{5})^2 x + 4\sqrt{\frac{7}{3 + \sqrt{5}}} = 0$$

saknes ir skaitļi  $a$  un  $b$ . Pierādīt, ka izteiksmes  $a^4 b + ab^4 + 3a^3 b^2 + 3a^2 b^3$  vērtība ir vesels skaitlis!

2. Pierādīt, ka katram naturālam  $n$  izteiksme  $3n^5 + 5n^4 - 8n$  dalās ar 10.

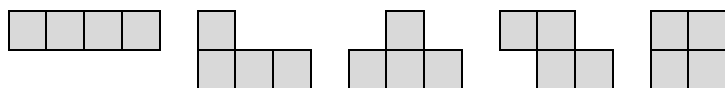
3. Pozitīviem skaitļiem  $a, b, c, d, e, f$  ir spēkā sakarības  $a^2 + b^2 = c^2$  un  $d^2 + e^2 = f^2$ . Pierādīt, ka  $(a + d)^2 + (b + e)^2 \leq (c + f)^2$ .

4. Pierādīt, ka regulāram desmitstūrim  $A_1 A_2 \dots A_{10}$  ir spēkā sakarība  $A_1 A_2 + R = A_1 A_4$ , kur  $R$  ir tam apvilktās riņķa līnijas rādiuss!

5. a) Pierādīt, ka, izmantojot visas piecas dotās figūras (skat. 2. att.), katru tieši vienu reizi, nav iespējams salikt taisnstūri!

b) Vai, izmantojot četras no dotajām figūrām, katru tieši vienu reizi, var salikt taisnstūri?

Visas figūras sastāv no vienādiem kvadrātiem. Figūras drīkst pagriezt vai apmest otrādi. Taisnstūrī nedrīkst būt caurumi, un figūras nedrīkst pārklāties.



2. att.

## Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

### 11. klase

#### 1. Kvadrātvienādojuma

$$(1 + \sqrt{5})x^2 - 4\sqrt{7} \cdot (1 + \sqrt{5})^2 x + 4\sqrt{7} = 0$$

saknes ir skaitļi  $a$  un  $b$ . Pierādīt, ka izteiksmes  $a^4 b + ab^4 + 3a^3 b^2 + 3a^2 b^3 + 16a^4 b^3 + 16a^3 b^4$  vērtība ir vesels skaitlis!

2. Vai uz rūtiņu lapas var uzzīmēt 1612-stūri, kura laukums ir 2015 rūtiņas un kura malas iet pa rūtiņu līnijām?

3. Pirātam Džonam Silveram kajītē ir 38 papagaiļi un 39 papagaiļu krātiņi. Katram papagailim ir savs krātiņš un vēl viens krātiņš stāv tukšs. Kādu dienu vētras laikā tie visi izmuka, tika noķerti un uz ātru roku salikti atpakaļ krātiņos (katrā krātiņā ne vairāk kā viens), bet ne obligāti savos. Vienā gājienā Džons Silvers var paņemt vienu papagaili un pārlīkt uz to krātiņu, kurš dotajā brīdī ir tukšs. Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru viņam noteikti pietiek, lai panāktu, ka visi papagaiļi atrodas savos sākotnējos krātiņos?

4. Naturāli skaitļi  $a, b$  un  $c$  ir savstarpēji pirmskaitļi un visi ir lielāki nekā 50. Zināms, ka  $a + b$  dalās ar  $c$  un  $b + c$  dalās ar  $a$ . Atrast mazāko iespējamo  $b$  vērtību!

5. Pierādīt, ka regulāram četrpadsmitstūrim  $A_1 A_2 \dots A_{14}$  ir spēkā sakarība  $A_1 A_2 + A_1 A_6 = A_1 A_4 + R$ , kur  $R$  ir tam apvilktās riņķa līnijas rādiuss!

## Latvijas 65. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

### 12. klase

1. Zināms, ka  $\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{2015}$ . Aprēķināt  $\frac{\sin 3x}{\sin x}$  vērtību!
2. Paralelograma  $ABCD$  iekšpusē atzīmēts punkts  $P$  tā, ka  $\angle PAB = \angle PCB$ . Pierādīt, ka  $\angle PBC = \angle PDC$ !
3. Pierādīt, ka jebkuram naturālam nepāra skaitlim  $n$  izteiksme  $2269^n + 2151^n + 1389^n - 1779^n$  dalās ar 2015.
4. Katrs no skaitļu ass punktiem ar veselu koordinātu ir nokrāsots vai nu baltā, vai melnā krāsā. Nekādi divi balti punkti neatrodas viens no otra attālumā 1 un nekādi divi melni punkti neatrodas viens no otra attālumā  $d$ . Noteikt, kādām naturālām  $d$  vērtībām šāds krāsojums ir iespējams!
5. Votivapu valodā visi vārdi sastāv tikai no diviem burtiem  $a$  un  $b$ . Jebkuru vārdu var iegūt no vārda "a", atkārtoti lietojot šādus trīs likumus:
  - 1) pierakstot vārdam galā burtu  $b$ ;
  - 2) pierakstot vārdam galā sevi pašu;
  - 3) aizstājot vārdā trīs pēc kārtas esošus burtus  $a$  ar vienu burtu  $b$ .Vai votivapu valodā ir vārdi **a) abbababab**; **b) baabaabaa**?