Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

9. klase

1. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka xy^2 ir naturāla skaitļa kubs. Pierādīt, ka arī x^2y ir naturāla skaitļa kubs!

2. Trijstūrī ABC novilkta mediāna AF, punkts D ir tās viduspunkts. Taisne CD krusto malu AB punktā E. Pierādīt: ja $BD = BF$, tad $AE = DE$!

3. Vai tabulā, kuras izmēri ir 4×4 rūtiņas, var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz **a)** 6; **b)** 7?

4. Atrast skaitļa $\frac{2016^{2016}-3}{3}$ mazāko pirmreizinātāju!

5. Naturālu skaitļu virkni (s_i) pēc parauga „2016" veido šādi:
- virknes pirmais loceklis s_1 ir 2;
- virknes otrais loceklis s_2 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_1 un tā pierakstā ir cipars 0;
- virknes trešais loceklis s_3 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_2 un tā pierakstā ir cipars 1;
- virknes ceturtais loceklis s_4 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_3 un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.
Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

9. klase

1. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka xy^2 ir naturāla skaitļa kubs. Pierādīt, ka arī x^2y ir naturāla skaitļa kubs!

2. Trijstūrī ABC novilkta mediāna AF, punkts D ir tās viduspunkts. Taisne CD krusto malu AB punktā E. Pierādīt: ja $BD = BF$, tad $AE = DE$!

3. Vai tabulā, kuras izmēri ir 4×4 rūtiņas, var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz **a)** 6; **b)** 7?

4. Atrast skaitļa $\frac{2016^{2016}-3}{3}$ mazāko pirmreizinātāju!

5. Naturālu skaitļu virkni (s_i) pēc parauga „2016" veido šādi:
- virknes pirmais loceklis s_1 ir 2;
- virknes otrais loceklis s_2 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_1 un tā pierakstā ir cipars 0;
- virknes trešais loceklis s_3 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_2 un tā pierakstā ir cipars 1;
- virknes ceturtais loceklis s_4 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_3 un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.
Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

2016. gada 10. marts
nms.lu.lv

Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

10. klase

1. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka xy^{10} ir naturāla skaitļa 33. pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{10}y$ ir naturāla skaitļa 33. pakāpe!

2. Trijstūra ABC leņķu $\sphericalangle CAB$ un $\sphericalangle BCA$ bisektrises krusto tam apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos P un Q, bet pašas krustojas punktā I. Pierādīt, ka $PQ \perp BI$!

3. Doti tādi reāli skaitļi x, y un z, ka $x+y+z=3$.
Pierādīt, ka $xy+xz+yz \leq 3$.

4. Pitagora trijstūrī visu malu garumi ir lielāki nekā 5. Vai var gadīties, ka tā **a)** trīs malu, **b)** divu malu garumi ir pirmskaitļi?
Piezīme. Pitagora trijstūris ir taisnleņķa trijstūris, kam visi malu garumi ir naturāli skaitļi.

5. Regulāra 2016-stūra visas virsotnes sākotnēji ir baltas. Kādu mazāko skaitu no tām var nokrāsot melnā krāsā tā, lai nepaliktu neviens **a)** taisnleņķa, **b)** šaurleņķu trijstūris, kuram visas virsotnes atrodas 2016-stūra baltajās virsotnēs?

Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

10. klase

1. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka xy^{10} ir naturāla skaitļa 33. pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{10}y$ ir naturāla skaitļa 33. pakāpe!

2. Trijstūra ABC leņķu $\sphericalangle CAB$ un $\sphericalangle BCA$ bisektrises krusto tam apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos P un Q, bet pašas krustojas punktā I. Pierādīt, ka $PQ \perp BI$!

3. Doti tādi reāli skaitļi x, y un z, ka $x+y+z=3$.
Pierādīt, ka $xy+xz+yz \leq 3$.

4. Pitagora trijstūrī visu malu garumi ir lielāki nekā 5. Vai var gadīties, ka tā **a)** trīs malu, **b)** divu malu garumi ir pirmskaitļi?
Piezīme. Pitagora trijstūris ir taisnleņķa trijstūris, kam visi malu garumi ir naturāli skaitļi.

5. Regulāra 2016-stūra visas virsotnes sākotnēji ir baltas. Kādu mazāko skaitu no tām var nokrāsot melnā krāsā tā, lai nepaliktu neviens **a)** taisnleņķa, **b)** šaurleņķu trijstūris, kuram visas virsotnes atrodas 2016-stūra baltajās virsotnēs?

2016. gada 10. marts
nms.lu.lv

Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

11. klase

1. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka xy^{433} ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{433}y$ ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe!

2. Šaurleņķu trijstūrim ABC ($AB > AC$) apvilktās riņķa līnijas centrs ir O un punkts D ir malas BC viduspunkts. Riņķa līnija ar diametru AD krusto malas AB un AC attiecīgi punktos E un F. Uz nogriežņa EF atlikts punkts M tā, ka $DM||AO$. Pierādīt, ka trijstūri ABD un FDM ir līdzīgi!

3. Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim n ($n > 1$) var atrast tādus naturālus skaitļus x un y ($x \leq y$), ka

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{y(y+1)}$$

4. Naturālu skaitļu virkni (s_i) pēc parauga „2016" veido šādi:

$s_1 = 2$;
s_2 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_1 un tā pierakstā ir cipars 0;
s_3 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_2 un tā pierakstā ir cipars 1;
s_4 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_3 un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.
Vai šajā virknē ir skaitlis **a)** 2001, **b)** 2006?

5. Pierādīt, ka jebkuru trijstūri **a)** ar trim, **b)** ar diviem nogriežņiem var sadalīt trīs daļās tā, ka katrai no daļām ir simetrijas ass!

Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

11. klase

1. Zināms, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka xy^{433} ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^{433}y$ ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe!

2. Šaurleņķu trijstūrim ABC ($AB > AC$) apvilktās riņķa līnijas centrs ir O un punkts D ir malas BC viduspunkts. Riņķa līnija ar diametru AD krusto malas AB un AC attiecīgi punktos E un F. Uz nogriežņa EF atlikts punkts M tā, ka $DM||AO$. Pierādīt, ka trijstūri ABD un FDM ir līdzīgi!

3. Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim n ($n > 1$) var atrast tādus naturālus skaitļus x un y ($x \leq y$), ka

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{y(y+1)}$$

4. Naturālu skaitļu virkni (s_i) pēc parauga „2016" veido šādi:

$s_1 = 2$;
s_2 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_1 un tā pierakstā ir cipars 0;
s_3 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_2 un tā pierakstā ir cipars 1;
s_4 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā s_3 un tā pierakstā ir cipars 6.

Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.
Vai šajā virknē ir skaitlis **a)** 2001, **b)** 2006?

5. Pierādīt, ka jebkuru trijstūri **a)** ar trim, **b)** ar diviem nogriežņiem var sadalīt trīs daļās tā, ka katrai no daļām ir simetrijas ass!

2016. gada 10. marts
nms.lu.lv

Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

12. klase

1. Zināms, ka x, y un z ir tādi naturāli skaitļi, ka $x^3y^5z^6$ ir naturāla skaitļa septītā pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^5y^6z^3$ ir naturāla skaitļa septītā pakāpe!

2. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas ω centrs ir I. Uz malām AB un BC izvēlēti attiecīgi punkti P un Q tā, ka $PI = QI$ un $PB > QB$. Nogrieznis QI krusto ω punktā T. Taisne, kas pieskaras ω punktā T, krusto malas AB un BC attiecīgi punktos U un V. Pierādīt, ka $PU = UV + VQ$!

3. Pierādīt, ka vismaz viens no 18 pēc kārtas sekojošiem trīsciparu skaitļiem dalās ar savu ciparu summu!

4. Divas funkcijas tiek definētas šādi: $f(a) = a^2 + 3a + 2$ un $g(b;c) = b^2 - b + 3c^2 + 3c$. Pierādīt, ka jebkurai naturālai a vērtībai iespējams atrast tādas naturālas b un c vērtības, ka $f(a) = g(b;c)$.

5. Aplūko visus tos funkciju $y = x^2 + px + q$ grafikus, kuriem ir trīs dažādi krustpunkti ar koordinātu asīm. Katram no tiem caur šiem trim krustpunktiem novelk riņķa līniju. Pierādīt, ka visām šīm riņķa līnijām ir kopīgs punkts!

Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

12. klase

1. Zināms, ka x, y un z ir tādi naturāli skaitļi, ka $x^3y^5z^6$ ir naturāla skaitļa septītā pakāpe. Pierādīt, ka arī $x^5y^6z^3$ ir naturāla skaitļa septītā pakāpe!

2. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas ω centrs ir I. Uz malām AB un BC izvēlēti attiecīgi punkti P un Q tā, ka $PI = QI$ un $PB > QB$. Nogrieznis QI krusto ω punktā T. Taisne, kas pieskaras ω punktā T, krusto malas AB un BC attiecīgi punktos U un V. Pierādīt, ka $PU = UV + VQ$!

3. Pierādīt, ka vismaz viens no 18 pēc kārtas sekojošiem trīsciparu skaitļiem dalās ar savu ciparu summu!

4. Divas funkcijas tiek definētas šādi: $f(a) = a^2 + 3a + 2$ un $g(b;c) = b^2 - b + 3c^2 + 3c$. Pierādīt, ka jebkurai naturālai a vērtībai iespējams atrast tādas naturālas b un c vērtības, ka $f(a) = g(b;c)$.

5. Aplūko visus tos funkciju $y = x^2 + px + q$ grafikus, kuriem ir trīs dažādi krustpunkti ar koordinātu asīm. Katram no tiem caur šiem trim krustpunktiem novelk riņķa līniju. Pierādīt, ka visām šīm riņķa līnijām ir kopīgs punkts!

2016. gada 10. marts
nms.lu.lv