LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

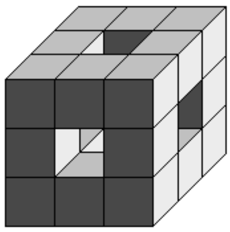
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Daļas ir uzrakstītas augošā secībā. Kāds naturāls skaitlis var būt ierakstīts $\square$ vietā?

$$\frac{5}{16};\ \frac{\square}{5};\ \frac{3}{4}$$

2. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.).
Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 8; **b)** 18?

3. No 20 vienādiem kubiņiem, kuriem katras šķautnes garums ir 1 cm, salīmēja 1. att. redzamo figūru, kurai katrā skaldnē trūkst centrālais kubiņš, kā arī iztrūkst pašas figūras centrālais kubiņš. Cik kvadrātiņi, kuriem katras malas garums ir 1 cm, ir nepieciešami, lai aplīmētu visu šo figūru?



1. att.

4. Vienādi burti apzīmē vienādus skaitļus, dažādi – dažādus. Atrodi vienu piemēru, kādi naturāli skaitļi jāliek burtu vietā, lai abas dotās vienādības būtu patiesas!

$$A + B = C \cdot D$$

$$A \cdot B = C + D$$

5. Sadali taisnstūri ar izmēriem 11×13 rūtiņas sešos kvadrātos tā, lai dalījuma līnijas ietu pa rūtiņu līnijām!

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

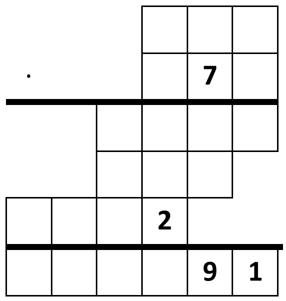
1. Trīs brāļiem – Rihardam, Haraldam un Olafam – kopā ir 13,20 eiro. Zināms, ka Haraldam ir par 2,10 eiro vairāk nekā Rihardam un par 3,30 eiro mazāk nekā Olafam. Cik naudas ir katram brālim?

2. Rindā viens aiz otra bez tukšumiem ir uzrakstīti pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi no 1 līdz N, tādējādi veidojot vienu lielu skaitli (Piemēram, ja $N = 12$, tad ir uzrakstīts skaitlis 1234567891011**12**.).
Kāds ir mazākais iegūtais skaitlis, kas dalās ar **a)** 9; **b)** 24?

3. Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1 vienība, pa rūtiņu līnijām uzzīmē astoņstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 vienības!

4. Dotas 20 pēc ārējā izskata vienādas monētas, bet visas to masas ir dažādas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 28 svēršanām atrast gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu?

5. Katrā tukšajā kvadrātiņā (skat. 2. att.) ieraksti vienu ciparu tā, lai iegūtu pareizu reizināšanas piemēru! Neviens skaitlis tajā nedrīkst sākties ar 0.



2. att.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

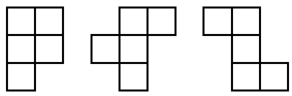
7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Saldumu veikalā vienas konfektes cena ir 3 centi. Aivaram ir vairāk naudas nekā Bruno, Cildai ir vairāk naudas nekā Aivaram, Dainai – vairāk nekā Cildai.
a) Vai Daina noteikti var nopirkt vairāk konfekšu nekā Bruno?
b) Vai Cilda noteikti var nopirkt vairāk konfekšu nekā Bruno?

2. Dots naturāls skaitlis, kas dalās ar 99 un kura pēdējais cipars nav 0. Pierādi, ka, uzrakstot šī skaitļa ciparus pretējā secībā, arī iegūst skaitli, kas dalās ar 99.

3. No trīs dotajām figūrām (skat. 3. att.) saliec simetrisku daudzstūri un uzzīmē arī simetrijas asi! Figūras drīkst būt pagrieztas vai apgrieztas spoguļattēlā.
Piezīme. Figūra ir simetriska, ja to var pārlocīt tā, ka tās abas puses sakrīt.



3. att.

4. Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 12 monētas ir ar vienādu masu, bet viena – ar atšķirīgu. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar divām svēršanām noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka par pārējām? Pašu monētu atrast nav nepieciešams.

5. **a)** Vai var atrast dažādus veselus skaitļus a, b, c un d tādus, ka izpildās vienādības $a + b = cd$ un $ab = c + d$?
b) Vai šādus skaitļus var atrast, ja papildus zināms, ka $a > 2016$?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Aprēķini izteiksmes $\sqrt{a-b}+\sqrt{b-c}+\sqrt{c-d}+\sqrt{d-a}$ vērtību!

2. Karlīna uzrakstīja divus skaitļus, kuru pierakstā nav izmantots cipars 0. Katru ciparu viņa aizstāja ar burtu: dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, vienādus – ar vienādiem. Viens no uzrakstītajiem skaitļiem *DUBĻUNNN* dalās ar 104. Pierādi, ka otrais skaitlis *BURBUĻVANNA* nedalās ar 56.

3. Caur taisnstūra $ABCD$ diagonāļu krustpunktu O novilkta taisne PQ tā, ka P atrodas uz AD, Q – uz BC un $PQ=QD$. Pierādīt, ka $DP=2AP$.

4. Kādu lielāko skaitu rūtiņu diagonāļu var novilkt 4×4 rūtiņas lielā tabulā, lai šīs diagonāles veidotu slēgtu lauztu līniju? Lauztā līnija nedrīkst pati sevi krustot vai pieskarties.

5. Smaragda pilsētā naudas vienība ir centi. Tur ir 21% PVN (pievienotās vērtības nodokļa) likme. Tas nozīmē, ka ikvienas pārdodamās preces cenu iegūst, pareizinot kādu veselu skaitu centu (cenu bez PVN) ar skaitli 1,21 un reizinājumu noapaļojot līdz tuvākajam veselajam centu skaitam. Cenu sauc par neiespējamu, ja to nevar iegūt minētajā veidā. Cik pavisam ir neiespējamu cenu no 1 līdz 1000 centiem ieskaitot?

Piemēram, 3 centi ir neiespējama cena, jo $2\cdot1{,}21=2{,}42$, pēc noapaļošanas 2 centi, savukārt, $3\cdot1{,}21=3{,}63$, pēc noapaļošanas 4 centi. Tā kā nekāda cita vesela skaitļa starp 2 un 3 nav, tad cenu, kas ir tieši 3 centi nevar iegūt pēc PVN pievienošanas.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Nosaki funkciju $y = 2016 - x$ un $y = \frac{2015}{x}$ grafiku krustpunktu koordinātas!

2. Pierādīt, ka

a) no pieciem naturāliem skaitļiem vienmēr var izvēlēties vairākus (vismaz divus), kuru summa dalās ar 4;

b) var atrast četrus tādus naturālus skaitļus, ka no tiem nevar izvēlēties vairākus (vismaz divus), kuru summa dalās ar 4.

3. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise BD. Zināms, ka $AD = DB$ un $AB = 2BC$. Aprēķināt $\sphericalangle BAC$ lielumu!

4. Ķērpjbārdis, Puszābaks un Uzrocis spēlē novusu, pie tam tas, kurš zaudē partiju, atdod savu vietu tam, kurš iepriekšējo partiju nespēlēja. Beigās izrādījās, ka Ķērpjbārdis ir izspēlējis 10 partijas, bet Puszābaks – 21. Cik partijas izspēlēja Uzrocis?

5. Doti 2016 skaitļi: 1^2; 2^2 ; 3^2; … ; 2015^2; 2016^2. Vai starp šiem skaitļiem var salikt ”$+$” un “$-$” zīmes tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 0?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Pierādīt, ka katram naturālam n ir patiesa vienādība

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2.$$

2. Pierādīt, ka no jebkuriem trim naturālu skaitļu kvadrātiem var izvēlēties divus tā, ka to summa vai starpība dalās ar 5.

3. Izliektā četrstūrī $APQC$ uz malas AC izvēlēts punkts B tā, ka trijstūri APB un BQC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūri ar pamatiem attiecīgi AB un BC. Ap trijstūri PBQ apvilktā riņķa līnija vēlreiz krusto taisni AC punktā S. Pierādīt, ka $PS = SQ$.

4. Ķērpjbārdis, Puszābaks un Uzrocis spēlē novusu, pie tam tas, kurš zaudē partiju, atdod savu vietu tam, kurš iepriekšējo partiju nespēlēja. Beigās izrādījās, ka Ķērpjbārdis ir izspēlējis 10 partijas, Puszābaks – 15, bet Uzrocis – 17. Kurš zaudēja sestajā partijā?

5. Pierādīt, ka katram naturālam n rūtiņu lapā, kurā rūtiņas malas garums ir 1, pa rūtiņu līnijām ir iespējams uzzīmēt astoņstūri tā, ka tā malu garumi pēc kārtas ir n; $n+1$; $n+2$; $n+3$; $n+4$; $n+5$; $n+6$; $n+7$.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Atrisināt nevienādību $x^2 + 3kx - k > 0$ visām parametra k vērtībām!

2. Pierādīt, ka starp jebkuriem pieciem naturālu skaitļu kvadrātiem var atrast divus tādus, ka to summa vai starpība dalās ar 13.

3. Izliekta četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā E. Ap trijstūriem ABE un CDE apvilktās riņķa līnijas krustojas arī punktā F. Pierādīt, ka trijstūri ABF un CDF ir līdzīgi!

4. Ķērpjbārdis, Puszābaks un Uzrocis spēlē novusu pie tam tas, kurš zaudē partiju, atdod savu vietu tam, kurš iepriekšējo partiju nespēlēja. Beigās izrādījās, ka Ķērpjbārdis ir izspēlējis 12 partijas, Puszābaks – 15, bet Uzrocis – 19. Ķērpjbārdis uzvarēja 14. partijā. Kurš zaudēja otrajā partijā?

5. Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums $\square x^4 - \square x^3 + \square x^2 - \square x + \square = 0$. Makss un Morics spēlē spēli: Makss nosauc vienu reālu skaitli, tad Morics nosauc otru, tad Makss nosauc trešo, Morics – ceturto un visbeidzot Makss – piekto. Pēc tam Morics kaut kādā secībā ieraksta šos skaitļus tukšajos kvadrātiņos. Vai Makss vienmēr var panākt, lai iegūtajam vienādojumam ir vismaz viena vesela sakne?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Noteikt funkcijas $y = \sqrt{5 \cdot 2^x - 3^x}$ definīcijas kopu!

2. Atrast visu skaitļu, kas pierakstāmi formā $a^4 - b^4$, kur $a > b > 5$ un a un b ir pirmskaitļi, lielāko kopīgo dalītāju!

3. Četrstūris $ABCD$ ir ievilkts riņķa līnijā, arī tā malu viduspunkti atrodas uz vienas riņķa līnijas. Pierādīt, ka $\sphericalangle ABD + \sphericalangle BDC = 90°$.

4. Ķērpjbārdis, Puszābaks un Uzrocis spēlē novusu, pie tam tas, kurš zaudē partiju, atdod savu vietu tam, kurš iepriekšējo partiju nespēlēja. Beigās izrādījās, ka Ķērpjbārdis ir uzvarējis 10 partijās, Puszābaks – 12, bet Uzrocis – 14 partijās. Cik partijas izspēlēja katrs no viņiem?

5. Kurš skaitlis ir lielāks: $\log_{2015} 2016$ vai $\log_{2016} 2017$?