Otrdien, 2016. gada 12. aprīlī.

1. uzdevums. Skaitlis n ir naturāls nepāra skaitlis, un x_1, x_2, …, x_n ir nenegatīvi reāli skaitļi. Pierādiet, ka

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2+x_{i+1}^2) \le \max_{j=1,\ldots,n}(2x_jx_{j+1}),$$

kur $x_{n+1}=x_1$.

2. uzdevums. Riņķa līnijā ievilkta četrstūra $ABCD$ diagonāles AC un BD krustojas punktā X. Punkti C_1, D_1 un M ir attiecīgi nogriežņu CX, DX un CD viduspunkti. Taisnes AD_1 un BC_1 krustojas punktā Y, un taisne MY krusto diagonāles AC un BD attiecīgi divos atšķirīgos punktos E un F. Pierādiet, ka taisne XY ir pieskare riņķa līnijai, kas novilkta caur punktiem E, F un X.

3. uzdevums. Dots naturāls skaitlis m. Aplūkosim $4m \times 4m$ rūtiņu laukumu. Teiksim, ka rūtiņa ir *saistīta* ar citu rūtiņu, ja abas rūtiņas atrodas vai nu vienā rindā vai vienā kolonnā. Nekādas citas rūtiņas nav *saistītas* savā starpā, tai skaitā, rūtiņa nav *saistīta* pati ar sevi.

Dažas rūtiņas nokrāsotas zilā krāsā tā, ka katra laukuma rūtiņa ir *saistīta* ar vismaz divām zilām rūtiņām. Nosakiet mazāko iespējamo zilo rūtiņu skaitu.

Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.

Trešdien, 2016. gada 13. aprīlī.

4. uzdevums. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 ar vienādiem rādiusiem krustojas divos atšķirīgos punktos X_1 un X_2. Riņķa līnija ω ārēji pieskaras riņķa līnijai ω_1 punktā T_1 un iekšēji pieskaras riņķa līnijai ω_2 punktā T_2. Pierādīt, ka taisnes X_1T_1 un X_2T_2 krustojas punktā, kurš atrodas uz riņķa līnijas ω.

5. uzdevums. Doti veseli skaitļi k un n tādi, ka $k \geq 2$, un $k \leq n \leq 2k-1$. Uz šaha galdiņa ar izmēriem $n \times n$ tiek izvietotas taisnstūra veida figūras ar izmēriem $k \times 1$ vai $1 \times k$, tā, ka katra figūra parklāj precīzi k blakus esošus lauciņus, un nekādas divas figūras savstarpēji nepārklājas. Figūras šādi tiek izvietotas tik ilgi, līdz vairs nav iespējams izvietot nevienu no abu veidu figūrām. Nosakiet katriem k un n minimālo figūru skaitu šādam izvietojumam.

6. uzdevums. Kopa S ir tādu naturālo skaitļu n kopa, kuriem n^4 dalās ar kādu skaitli no skaitļu rindas n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+2n.

Pierādiet, ka kopa S satur bezgalīgi daudz skaitļus katrā no šādām formām: $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$, un nesatur nevienu skaitli formā $7m+3$ vai $7m+4$ (m ir vesels skaitlis).

Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.