9. komandu olimpiāde matemātikā "Baltijas Ceļš '98".
Īsi uzdevumu atrisinājumi.

Lasītājam ieteicams patstāvīgi atjaunot izlaistās spriedumu detaļas.

1. Viegli pārbaudīt, ka, izvēloties par f(x,y) naturālo skaitļu x un y mazāko kopīgo dalāmo, visas uzdevuma formulējumā minētās īpašības tiek apmierinātas. Ar matemātisko indukciju pierādām, ka funkcijas vērtības ir noteiktas viennozīmīgi, tātad citu atrisinājumu nav.
2. No kosinusu teorēmas iegūstam vienādību $a^2+ab+b^2=c^2$. Pieņemsim, ka a un b ir savstarpēji pirmskaitļi un c dalās ar pirmskaitli p. Ja pierādīsim, ka $p>5$, uzdevums būs atrisināts.
Tā kā LKD(a, b)=1, tad c - nepāra skaitlis. Tāpēc $p>2$. Ja $p=3$, varam pieņemt, ka a nedalās ar 3. Dotā vienādība pārveidojas par $4c^2=(a+2b)^2+3a^2$, no kurienes $(a+2b)^2$ dalās ar 3, tātad arī ar 9. Tāpēc $3a^2$ dalās ar 9 - pretruna. Ja $p=5$, varam pieņemt, ka a nedalās ar 5. Tad $3a^2\equiv\pm3(\mathrm{mod}5)$ un $(a+2b)^2\equiv\mp2(\mathrm{mod}\,5)$ - pretruna.
Gadījums, kad LKD(a,b)>1, reducējas uz apskatīto.
3. Vienādojums pārveidojas par $(2x-y)(5y-x)=121$. Sadalot 121 veselos reizinātājos visos iespējamos veidos, iegūstam atrisinājumu (14;27).
4. Izmantosim lemmu: ja P(x) - polinoms ar veseliem koeficientiem, bet a un b - divi dažādi veseli skaitļi, tad P(a)-P(b) dalās ar a-b.
Ja uzdevumā minētajam polinomam P(x) būtu pozitīva sakne c, tad $c\geq1999$. Tad skaitlis P(1)-P(c)=P(1)-0=P(1) būtu vesels pozitīvs trīsciparu skaitlis, un tam jādalās ar 1-c, kur $|1-c|\geq1998$ - pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, pieņemot, ka P(x) ir vesela sakne, kas mazāka par 1.
5. Ar matemātisko indukciju pierāda, ka šādu (n+1) - ciparu skaitli var iegūt, n ciparu skaitlim priekšā pierakstot b vai a atkarībā no tā, vai n - ciparu skaitlis dalās vai nedalās ar 2^{n+1}.
Atsevišķi jāaplūko gadījums, ja b=0.
6. Definējam jaunu polinomu Q(x)=P(x)-P(-x). Polinoma Q pakāpe nav augstāka par 5. Acīmredzami tam ir saknes 0; $\pm a$; $\pm b$, pie tam 0 ir šī polinoma divkārša sakne (jo Q'(0)=0). Tāpēc Q ir nulles polinoms, no kā seko vajadzīgais.
7. Patvaļīgam reālam skaitlim z apzīmējam f(z)=c. Ja x=y=z, tad $f(c^2)=2c$. Ja $x=y=c^2$, tad $f(4c^2)=4c$. Ja x=z un $y=4c^2$, tad $f(4c^2)=5c$. Tāpēc c=0 un f(x) ir identiski nulle. Pārbaude pierāda, ka šī funkcija der.
8. Pareizinot abas vienādības puses ar (1-x), pēc Ņūtona binoma formulas iegūstam, ka abās pusēs ir $2^n-(1+x)^n$. Tātad dotā vienādība pareiza pie $x\neq1$. Tā kā abās vienādības pusēs ir polinomi, tā pareiza arī pie x=1 (kaut vai nepārtrauktības dēļ).

9. Tā kā funkcija $f(t)=\sqrt{1+t^2}$ ir izliekta uz leju intervālā $(0;\infty)$, tad $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$. Atliek ievietot $x=\mathrm{tg}\alpha$ un $y=\mathrm{tg}\beta$, no kurienes seko $\frac{1}{\cos\gamma}<\frac{1}{\cos\delta}$.

10. Aplūkojiet situāciju, kad kāda n-stūra virsotne sakrīt ar kādu (n-1) - stūra virsotni. "Grieziet" (n-1) - stūri vienā virzienā tik ilgi, kamēr sakrīt divas citas virsotnes, un izsekojiet summas S izmaiņai šajā griešanas procesā. Ievērojiet, ka vienmēr divas n-stūra virsotnes atrodas uz viena loka, kura gali ir (n-1) - stūra virsotnes.

11. Ievietojot $R=\frac{abc}{4L}$ un izmantojot Hērona formulu, pierādāmā nevienādība pārveidojas par acīmredzamu: $\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)^2\ge 0$. Kā redzams, vienādība izpildās tikai vienādsānu un taisnleņķa trijstūriem ($A=B$ resp. $C=90°$).

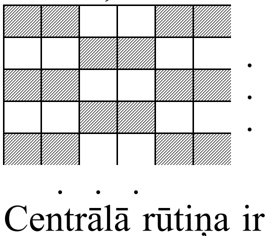
12. Apzīmējam $\angle BAD=\alpha$, $\angle CAD=\beta$. Tad $\angle BDA=2\alpha$, $\angle CDA=2\beta$. No sinusu teorēmas $\frac{AD}{BD}+\frac{AD}{CD}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}$. Pārveidojumu rezultātā (ievērojot, ka $\alpha+\beta=90°$), iegūstam $\frac{AD}{BD}+\frac{AD}{CD}=2$, no kurienes seko vajadzīgais.

13. No dotās paralelitātes seko, ka eksistē homotētija ar centru P, kas pārveido AE par CB. Ja tā pārveido D par F, tad $\angle CFB=\angle ADE=\angle BDC$. Tāpēc F atrodas uz ΔBDC apriņķa līnijas. Tāpēc apskatāmā homotētija attēlo ΔAED apriņķa līniju par ΔBDC apriņķa līniju. Tāpēc $\angle EAD=\angle BDF$, k.b.j.

14. Apskatām ortogonālās projekcijas uz virsotnes A ārējā leņķa bisektrises un lietojam Talesa teorēmu.

15. Atrodam tādu punktu P, ka APCD ir taisnstūris. Tad AE:ED=CD:DB=AP:DB, tāpēc B; E; P atrodas uz vienas taisnes. Tā kā $\angle DFP=90°$, tad F atrodas uz APCD apvilktās riņķa līnijas, no kurienes seko vajadzīgais.

16. Nē, nevar. Izkrāsojam "šaha galdiņu", kā parādīts zīmējumā:



Centrālā rūtiņa ir balta, un katra 4x1 figūra pārklāj divas baltas un divas melnas rūtiņas, tātad kopā balto rūtiņu būtu jābūt par 1 vairāk nekā melno; bet patiesībā par 1 vairāk ir melno rūtiņu.

17. Izmanto matemātisko indukciju pēc kastu skaita k; induktīvajā pārejā vienā kastē ieliekam visus tās krāsas priekšmetus, kurā nokrāsots vismazāk priekšmetu, un (ja nepieciešams) dažus tās krāsas priekšmetus, kurā nokrāsots visvairāk priekšmetu.

18. Pārbaude parāda, ka neder n= 1;2;3. Pie n=4 var ņemt skaitļus 3;5;6;7. Ja pie n=k der skaitļi a_1; a_2; … a_k, tad pie n= k+1 der skaitļi 1; $2a_1$; $2a_2$; … $2a_k$.

19. Uzdevumu risinājums balstās uz šādu apgalvojumu: sacenšoties divām komandām (vienādu vai dažādu izmēru), vismaz vienā komandā var atrast spēlētāju, kas uzvarējis vismaz pusē savu spēļu. (Pierādījums no pretējā).

Atrodam šādu spēlētāju. Piešķiram tam baltu cepuri un izslēdzam no tālākas aplūkošanas tos, ko viņš uzvarējis. Atkārtojam šo procedūru, kamēr vienā komandā vairs nav neizslēgtu spēlētāju. Tad spēlētāji, kam otrā komandā piešķirtas baltās cepures, veido vajadzīgo grupu. To nav vairāk par 10, jo ar katras šādas baltās cepures piešķiršanu spēlētāju skaits "iztukšotajā" komandā samazinājās vismaz divkārt, un sākotnēji tajā bija mazāk nekā 2^{10} spēlētāju.

20. Sadalām visus apskatāmos skaitļus grupās atkarībā no tā, kurās pozīcijās atrodas pirmie cipari 1;9;9;8 to pierakstā. Viegli saprast, ka skaitļu skaits grupā dalās ar 8, ja šīs pozīcijas nav četras pirmās pozīcijas, un ir 9^{n-4}, ja tās ir četras pirmās pozīcijas. Tāpēc meklējamais atlikums ir 1.