Language: **Latvian**

Day: **1**

*Ceturtdien, 2012. gada 12. aprīlī*

**1. uzdevums.** Punkts $O$ ir trijstūra $ABC$ apvilktās riņķa līnijas centrs. Punkti $D$, $E$ un $F$ atrodas attiecīgi uz $BC$, $CA$ and $AB$ to iekšpusē tā, ka $DE$ ir perpendikulārs $CO$, un $DF$ ir perpendikulārs $BO$. (Iekšpusē nozīmē, ka, piemēram, punkts $D$ atrodas uz taisnes $BC$ starp punktiem $B$ un $C$, u.t.t.)

Punkts $K$ ir trijstūrim $AFE$ apvilktās riņķa līnijas centrs. Pierādīt, ka taisnes $DK$ un $BC$ ir perpendikulāras.

**2. uzdevums.** Naturālam skaitlim $n$ atrast lielāko iespējamo veselo skaitli $m$, kuram izpildās īpašība:

tabulā ar $m$ rindām un $n$ kolonnām ir iespējams tā ierakstīt reālus skaitļus, lai jebkurām divām dažādām tabulas rindām $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ un $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ būtu patiesa izteiksme:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots, |a_n - b_n|) = 1.$$

(Lai izteiktu $m$, var tikt izmantota izteiksme, kura atkarīga no $n$.)

**3. uzdevums.** Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (R-reālo skaitļu kopa) tādas, ka

$$f\big(\, yf(x+y) + f(x) \,\big) = 4x + 2yf(x+y)$$

visiem $x, y \in \mathbb{R}$.

**4. uzdevums.** Veselu skaitļu kopu $A$ sauksim par *summas-pilnu*, ja $A \subseteq A + A$, t.i. katrs kopas $A$ elements $a \in A$ ir izsakāms kā divu šīs kopas elementu summa $b, c \in A$ (b un c var būt arī vienādi).

Teiksim, ka veselu skaitļu kopa $A$ ir *nulles-summas-brīva*, ja 0 ir vienīgais veselais skaitlis, kuru nevar izteikt, kā kopas $A$ galīgas netukšas apakškopas visu elementu summu.

Vai eksistē summas-pilna un nulles-summas-brīva veselu skaitļu kopa?



Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums - 7 punkti.

Language: **Latvian**

Day: **2**

*Piektdien, 2012. gada 13. aprīlī.*

**5. uzdevums.** Pirmskaitļi $p$ un $q$ ir tādi, ka kādam naturālam skaitlim $n$:

$$\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}.$$

Atrodiet visas iespējamās $q-p$ vērtības

**6. uzdevums.** Sociālajā tīklā *Mugbook* ir reģistrējušies bezgalīgi daudz lietotāji. Daži lietotāju pāri (pāris sastāv no diviem dažādiem lietotājiem) ir reģistrējušies kā *Draugi*. Katram lietotājam Draugu skaits ir galīgs, un katram lietotājam ir vismaz viens Draugs. *(Draudzība ir simetriska; tas ir, ja $A$ ir $B$ Draugs, tad arī $B$ ir $A$ Draugs.)*

Katrs dalībnieks nominē kādu no saviem Draugiem par savu *Labāko draugu*. Ja $A$ nominē $B$ kā savu Labāko draugu, tad (diemžēl) no tā neseko, ka $B$ obligāti nominēs $A$ kā savu Labāko draugu. Ja kāds ir nominēts par Labāko draugu, tad viņš tiek saukts par 1.-*labāko draugu*. Un vispārīgi, ja $n>1$ ir naturāls skaitlis, tad lietotājs ir $n-$*tais-labākais draugs*, ja viņš ir nominēts, kā Labākais draugs kādam, kurš pats ir $(n-1)-$*ais-labākais draugs*. Lietotājs, kurš ir $k$-tais-*labākais draugs* katram naturālam $k$, tiek saukts par *Populāru*.

(a) Pierādiet, ka katrs Populārs lietotājs ir Labākais draugs kādam Populāram lietotājam.

(b) Pierādiet, ka, ja lietotājiem varētu būt bezgalīgi daudz draugu, tad ir iespējams, ka Populārs lietotājs nav Labākais draugs nevienam Populāram lietotājam.

**7. uzdevums.** Šaurleņķa trijstūrim $ABC$ apvilkta riņķa līnija $\Gamma$ un dots tā ortocentrs $H$. Punkts $K$ ir riņķa līnijas $\Gamma$ punkts, kurš atrodas otrā pusē no $BC$ nekā $A$. $L$ ir punktam $K$ simetrisks punkts attiecībā pret taisni $AB$, un $M$ ir punktam $K$ simetrisks punkts attiecībā pret taisni $BC$. Punkts $E$ ir otrs riņķa līnijas $\Gamma$ un trijstūrim $BLM$ apvilktās riņķa līnijas krustpunkts. Pierādīt, ka taisnes $KH$, $EM$ un $BC$ krustojas vienā punktā. *(Trijstūra ortocentrs ir trijstūra augstumu krustpunkts.)*

**8. uzdevums.** Par *vārdu* sauksim kāda alfabēta burtu galīgu sekvenci. Teiksim, ka vārds ir *ar atkārtojumiem*, ja tas sastāv no divu vai vairāku identisku *vārdu* apvienojuma (piemēram, *ababab* un *abcabc* ir ar atkārtojumiem, bet *ababa* un *aabb* nav).

Pierādiet, ja *vārdam* jebkuru divu blakus burtu savstarpējas maiņas rezultāts ir vārds ar atkārtojumiem, tad visi tā burti ir identiski. (Piezīme. Divu vienādu burtu maiņa, saglabā *vārdu* nemainīgu.)



Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums - 7 punkti.