Language: **Latvian**

Day: **1**

Sestdien, 2014. gada 12. aprīlī.

1. uzdevums. Atrast visas reālas konstantes t, tādas, ka no tā, ka a, b, c ir patvaļīga trijstūra malu garumi, izriet tas, ka arī $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ ir kāda trijstūra malu garumi.

2. uzdevums. Trijstūra ABC malas AB iekšējs punkts D un, attiecīgi, malas AC iekšējs punkts E doti tā, ka $DB = BC = CE$. Punkts F ir taišņu CD un BE krustpunkts. Pierādīt, ka trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs I, trijstūra DEF augstumu krustpunkts H un trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas loka BAC viduspunkts M atrodas uz vienas taisnes.

3. uzdevums. Apzīmēsim naturāla skaitļa m visu pozitīvo dalītāju skaitu ar $d(m)$, un skaitļa m dažādo pirmreizinātāju skaitu ar $\omega(m)$. Dots naturāls skaitlis k. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu n tādu, ka $\omega(n) = k$ un $d(a^2 + b^2)$ nedalās ar $d(n)$ visiem naturālu skaitļu pāriem a un b, kuriem izpildās sakarība $a + b = n$.

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.

Language: **Latvian**

Day: 2

EGMO | 2014
European Girls' Mathematical Olympiad
Antalya · Turkey

Svētdien, 2014. gada 13. aprīlī.

Problem 4. Atrast visus naturālos skaitļus $n \geq 2$, kuriem eksistē veseli skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, tādi, ka, ja $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ un $2i + j$ dalās ar n, tad $x_i < x_j$.

Problem 5. Dots naturāls skaitlis n. Mums ir n kastes, un katrā no tām atrodas nenegatīvs skaits nelielu akmeņu. Katrā gājienā ir atļauts paņemt divus akmeņus no kādas kastes, vienu no tiem aizsviest, bet otru ielikt kādā citā kastē pēc mūsu izvēles. Akmeņu izkārtojumu kastēs sauksim par *Atrisināmu*, ja ar galīgu gājienu skaitu (pieļaujams arī ar 0 gājieniem) iespējams panākt izkārtojumu, kurā neviena no kastēm nav tukša. Atrast visus tādus akmeņu izkārtojumus, kuri sākotnēji nav *Atrisināmi*, bet kļūst *Atrisināmi* pievienojot vienu akmeni jebkurā no kastēm, neatkarīgi no tā, kuru kasti mēs izvēlētos.

Problem 6. Ar $\mathbb{R}$ apzīmē reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tādas, ka visiem reālu skaitļu pāriem x un y izpildās sakarība:

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

.

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.