*Ceturtdien, 2015. gada 16. aprīlī.*

**1. uzdevums.** Šaurleņķa trijstūrī $ABC$ no punkta $C$ novilkts augstums CD. Leņķa $\angle ABC$ bisektrise krusto $CD$ punktā $E$ un atkārtoti krusto trijstūrim $ADE$ apvilkto riņķa līniju $\omega$ punktā $F$. Pierādīt, ka, ja $\angle ADF = 45°$, tad taisne CF ir riņķa līnijas $\omega$ pieskare.

**2. uzdevums.** *Domino kauliņš* ir kauliņš ar izmēriem $2 \times 1$ vai $1 \times 2$ rūtiņas. Noskaidrot, cik dažādos veidos var izvietot tieši $n^2$ domino kauliņus bez savstarpējas to pārklāšanās uz šaha galdiņa ar izmēriem $2n \times 2n$ rūtiņas, tā, lai ikviens šī galdiņa $2 \times 2$ rūtiņu kvadrāts saturētu vismaz 2 nenosegtas rūtiņas, kuras abas atrodas vienā un tajā pašā rindā vai arī vienā un tajā pašā kolonnā.

**3. uzdevums.** Doti naturāli skaitļi $n, m$ lielāki par 1, un naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_m$, kuri nav lielāki par $n^m$. Pierādīt, ka eksistē naturāli skaitļi $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ne lielāki par $n$, tādi, ka

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n,$$

kur ar $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ apzīmē skaitļu $x_1, x_2, \ldots, x_m$ lielāko kopīgo dalītāju.



Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.

*Piektdien, 2015. gada 17. aprīlī.*

**4. uzdevums.** Noskaidrot, vai eksistē tāda bezgalīga naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kurai katram naturālam skaitlim $n$ izpildās sakarība

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}.$$

**5. uzdevums.** Doti naturāli skaitļi $m$ un $n$. Skaitlis $m > 1$. Anna skaitļus $1, 2, \ldots, 2m$ sadala $m$ pāros. Tad Beta izvēlās vienu skaitli no katra pāra un aprēķina visu izvēlēto skaitļu summu. Pierādīt, ka Anna var izvēlēties pārus tā, lai Betai nekad neizdotos summā iegūt skaitli $n$.

**6. uzdevums.** Punkts $H$ ir šaurleņķa trijstūra $ABC$, $AB \neq AC$, augstumu krustpunkts, bet $G$ ir tā mediānu krustpunkts. Taisne $AG$ krusto $\triangle ABC$ apvilkto riņķa līniju punktos $A$ un $P$. Punkts $P'$ ir punktam $P$ simetrisks punkts attiecībā pret taisni $BC$. Pierādīt, ka $\angle CAB = 60°$ tad un tikai tad, ja $HG = GP'$.



Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.