

## Grūtāki uzdevumi par Dirihlē principu

### Uzdevums 1

$10 \times 10$  rūtiņu lapā jāizvieto sekojoši „kuģi”: viens  $1 \times 4$  (t.i., četrstūris  $1 \times 4$  rūtiņas), divi  $1 \times 3$ , trīs  $1 \times 2$  un četri  $1 \times 1$ . Kuģiem nedrīkst būt kopīgu punktu, bet tie var pieskarties laukuma malām. Pierādīt:

- ja kuģus izvieto šajā secībā (sāk ar lielākajiem), tad vienmēr izdosies izvietot visus kuģus;
- ja kuģus izvieto apgrieztā secībā (sāk ar mazākajiem), iespējama situācija, ka visus kuģus izvietot nav iespējams.

### Uzdevums 2

No naturāliem skaitļiem no 1 līdz 1200 izvēlējās 372 dažādus skaitļus tā, ka nekādu divu starpība nav 4, 5 vai 9. Pierādīt, ka tika izvēlēts skaitlis 600.

### Uzdevums 3

Futbola turnīrā katra no  $n > 4$  komandām spēlēja ar katru. Par uzvaru tika piešķirti 3 punkti, par neizšķirtu – 1, par zaudējumu – 0.

Turnīra beigās izrādījās, ka visām komandām ir vienāds punktu skaits. Pierādīt, ka var atrast 4 komandas, kurām ir vienāds uzvaru, neizšķirtu un zaudējumu skaits.

### Uzdevums 4

Plaknē uzzīmēta riņķa līnija, kuras iekšienē Miervaldis prātā atzīmē  $n$  punktus, bet Visvaldis mēģina šos punktus atrast.

Vienā darbībā Visvaldis norāda uz punktu (iekš vai ārpus riņķa līnijas), bet Miervaldis paziņo attālumu no šī punkta līdz tuvākajam iedomātajam (bet vēl neatrastajam) punktam. Ja šis attālums ir nulle, tad punkts skaitās atrasts. Visvaldis prot atzīmēt punktus plaknē un veikt konstrukcijas ar cirkuli un lineālu bez skalas.

Vai Visvaldis var atminēt visus punktus ar mazāk nekā  $(n + 1)^2$  darbībām?

### Uzdevums 5

Katra no deviņām taisnēm sadala kvadrātu divos četrstūros, kuru laukumu attiecība ir 2:3. Pierādīt, ka vismaz trīs no šīm taisnēm iet caur vienu punktu.

### Uzdevums 6

Skaitļi 1, 2, 3, ..., 101 uzrakstīti virknē kaut kādā secībā. Pierādīt, ka no tiem var izdzēst 90 tā, ka palikušie 11 būs sakārtoti vai nu augoši, vai dilstoši secībā!

### Uzdevums 7

Bezgalīgas rūtiņu lapas līniju rūtiņu virsotnes izkrāsotas trīs krāsās. Pierādīt, ka eksistē vienādsānu taisnleņķa trīsstūris, kura visas virsotnes atrodas vienādas krāsas punktos.