

2006. gada 12. jūlijā

1. uzdevums. Trijstūrī ABC ievilktais riņķa līnijas centrs ir I . Punkts P atrodas trijstūra iekšpusē un apmierina sakarību

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Pierādiet, ka $AP \geq AI$ un ka vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja punkts P sakrīt ar punktu I .

2. uzdevums. Pieņemsim, ka P ir regulārs 2006-stūris. Daudzstūra P diagonāli sauc par *labu*, ja tās galapunkti sadala P kontūru divās daļās, katra no kurām satur nepāra skaitu daudzstūra P malu. Arī daudzstūra P malas sauc par *labām*.

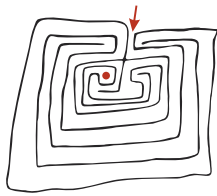
Pieņemsim, ka daudzstūris P ir sadalīts trijstūros, novelkot 2003 diagonāles, nekādām divām no kurām nav kopīgu punktu daudzstūra P iekšpusē. Kāds ir lielākais šādā sadalījumā iespējamais tādu vienādsānu trijstūru skaits, kuriem ir pa divām *labām* malām?

3. uzdevums. Noskaidrojiet, kāds ir vismazākais reālais skaitlis M , ar kuru nevienādība

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

ir spēkā visiem reāliem skaitļiem a , b un c .

*Risināšanas laiks: 4 stundas 30 minūtes
Katrs uzdevums ir 7 punktus vērts*



2006. gada 13. jūlijā

4. uzdevums. Noskaidrojiet, kuriem veselu skaitļu pāriem (x,y) ir spēkā vienādība

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

5. uzdevums. Pieņemsim, ka $P(x)$ ir n -tās pakāpes polinoms ar veseliem koeficientiem, $n > 1$. Pieņemsim, ka k ir pozitīvs vesels skaitlis. Aplūkosim polinomu $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$, kur P parādās k reizes. Pierādiet, ka ir ne vairāk kā n tādu veselu skaitļu t , kuriem $Q(t) = t$.

6. uzdevums. Katrai izliekta daudzstūra P malai b piekārtojam maksimālo tāda trijstūra laukumu, kurš ietilpst daudzstūrī P un kuram b ir viena no malām. Pierādiet, ka visām daudzstūra P malām piekārtoto laukumu summa nav mazāka par divkārtotu daudzstūra P laukumu.

Risināšanas laiks: 4 stundas 30 minūtes

Katrs uzdevums ir 7 punktus vērts