2006. gada 12. jūlijā

1. uzdevums. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I. Punkts P atrodas trijstūra iekšpusē un apmierina sakarību

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB\,.$$

Pierādiet, ka $AP \geq AI$ un ka vienādība ir spēkā tad un tikai tad, ja punkts P sakrīt ar punktu I.

2. uzdevums. Pieņemsim, ka P ir regulārs 2006-stūris. Daudzstūra P diagonāli sauc par *labu*, ja tās galapunkti sadala P kontūru divās daļās, katra no kurām satur nepāra skaitu daudzstūra P malu. Arī daudzstūra P malas sauc par *labām*.

Pieņemsim, ka daudzstūris P ir sadalīts trijstūros, novelkot 2003 diagonāles, nekādām divām no kurām nav kopīgu punktu daudzstūra P iekšpusē. Kāds ir lielākais šādā sadalījumā iespējamais tādu vienādsānu trijstūru skaits, kuriem ir pa divām *labām* malām?

3. uzdevums. Noskaidrojiet, kāds ir vismazākais reālais skaitlis M, ar kuru nevienādība

$$\left|\, ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\,\right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

ir spēkā visiem reāliem skaitļiem a, b un c.

Risināšanas laiks: 4 stundas 30 minūtes
Katrs uzdevums ir 7 punktus vērts

2006. gada 13. jūlijā

4. uzdevums. Noskaidrojiet, kuriem veselu skaitļu pāriem (x,y) ir spēkā vienādība

$$1+2^{x}+2^{2x+1}=y^{2}.$$

5. uzdevums. Pieņemsim, ka $P(x)$ ir n-tās pakāpes polinoms ar veseliem koeficientiem, $n>1$. Pieņemsim, ka k ir pozitīvs vesels skaitlis. Aplūkosim polinomu $Q(x)=P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kur P parādās k reizes. Pierādiet, ka ir ne vairāk kā n tādu veselu skaitļu t, kuriem $Q(t) = t$.

6. uzdevums. Katrai izliekta daudzstūra P malai b piekārtojam maksimālo tāda trijstūra laukumu, kurš ietilpst daudzstūrī P un kuram b ir viena no malām. Pierādiet, ka visām daudzstūra P malām piekārtoto laukumu summa nav mazāka par divkāršotu daudzstūra P laukumu.

Risināšanas laiks: 4 stundas 30 minūtes
Katrs uzdevums ir 7 punktus vērts