

Pēterburgas olimpiādes 2014. gada uzdevumi

Spēle 1 (30)

Uz 10x20 rūtiņu lapas dažas rūtiņas ir nokrāsotas sarkanas.

Valters sagrieza šo lapu (pa rūtiņu malām) taisnstūros tā, ka katrā taisnstūrī atradās 5 sarkanas rūtiņas. Un salīmēja lapu atpakaļ. **Zane** sagrieza lapu (atkal, pa rūtiņu malām) taisnstūros tā, ka katrā taisnstūrī atradās pa 7 sarkanām rūtiņām. Un salīmēja lapu atpakaļ. Vai **Toms** varēs sagriezt šo lapu pa rūtiņu malām taisnstūros tā, ka katrā taisnstūrī atradīsies pa 6 sarkanām rūtiņām?

Spēle 2 (38)

Uz 1000 kartiņām sarakstīti skaitļi no 1 līdz 1000, katrs vienu reizi. **Konstantīns** un **Vitālijs** pēc kārtas ņem pa vienai kartiņai kamēr visas kartiņas ir paņemtas. Konstantīns ņem pirmais un vēlas panākt, lai uz viņa kartiņām uzrakstīto skaitļu summa dalītos ar 25. Vitālijs vēlas draugam patraucēt. Vai Konstantīns var garantēti uzvarēt?

Spēle 3 (70)

Pēteris un **Vasīlijs** spēlē spēli – pēc kārtas (Pēteris sāk) atzīmē kādu naturālu skaitli, kas nepārsniedz 1000. Aizliegts atzīmēt skaitļus, kas jau ir atzīmēti; skaitļus, kas atšķiras no jau atzīmēta skaitļa par 1; un skaitļus, kas summā ar kādu jau atzīmētu skaitli dod 1001. Kurš nevar atzīmēt skaitli – zaudē. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

Griešana kvadrātos (8,10,16,23)

$n*(n+3)$ rūtiņu laukums tika sagriezts vairākos kvadrātos (griezumi gāja pa rūtiņu malām). Kāds ir mazākais skaits kvadrātu ar nepāra malu garumu šādā griezumā?

Pakaušu ausis (68)

Katrā $n*n$ režģa rūtiņā stāv cilvēks un skatās uz kādu no blakus rūtiņām un redz tajā stāvošā cilvēka pakausi vai ausi (nevis seju un neviens neskatās ārā no režģa). Kāds mazākais daudzums cilvēku var redzēt ausi?

Junga diagrammas (40)

Taisnstūra rūtiņu laukums izkrāsots šaha krāsojumā. Dažas no rūtiņām atzīmētas ar krustiņiem tā, ka ja rūtiņa ir atzīmēta, tad visas rūtiņas no tās pa labi ir atzīmētas un visas rūtiņas no tās uz leju ir atzīmētas (šis sauc arī par Junga diagrammām).

Ir izrādījies, ka ar krustiņiem atzīmēts vienāds skaits baltu un melnu rūtiņu. Pierādiet, ka šo Junga diagrammu var sagriezt $1*2$ taisnstūros!

Interesanta kombinatorika (57)

Uz divām paralēlām taisnēm atzīmēts pa 40 punktiem uz katras. Visi šie punkti ir pa pāriem savienoti ar nogriežņiem tā, ka nogriežņiem nav kopīgu punktu. Pierādiet, ka veidu, kā to var izdarīt, skaits nepārsniedz 3^{39} !

Salvešu ģeometrija (53)

Uz rūtiņu lapas (ar rūtiņu malas garumu 1) nomesta kvadrātveida salvete $100*100$. Salvete nosedz kaut kādus rūtiņu stūrus. Ar kādu taišņu skaitu var garantēti noklāt visus nosegtos rūtiņu stūrus?

Skudras (<http://avva.livejournal.com/2132472.html>)

Dots izliekts daudzskaldnis. Pa katras skaldnes perimetru pretēji pulksteņa virzienam rāpo skudra. Pierādīt, ka kādas divas skudras noteikti satiksies!

Burvju triks (<http://falcao.livejournal.com/180432.html>)

Burvju mākslinieks atveic sekojošu triku: palūdz skatītājiem nosaukt 5 dažādus naturālus skaitļus līdz 100. Mākslinieks no tiem izvēlas vienu un atlikušos ievada savā asistentā-datorprogrammā. Datorprogramma parūc un izvada atlikušo (neievadīto) skaitli. Kā šis triks strādā?