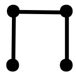
Matemātikas komandu olimpiādes "Baltijas Ceļš '2000" uzdevumu atrisinājumi.

1. Apzīmēsim $\angle MAB = \angle MBA = ... = \alpha$. Tad $\angle MAK = \alpha + (\angle BAC - \alpha) = \angle BAC$, $AM:AB = 1:2\cos\alpha = AK:AC$. Tāpēc $\Delta MAK \sim \Delta BAC$. No šejienes $MK=BC:2\cos\alpha=BN$. Līdzīgi iegūstam $BM = NK$. No tā seko vajadzīgais.
2. Papildinām ΔABC līdz kvadrātam $ABKC$. Taisnes AP krustpunktu ar BK apzīmējam ar N. Pakāpeniski iegūstam $\Delta AMC=\Delta BNA$, $\angle AMC = \angle BNA$; $\Delta BMP=\Delta BNP$, $\angle BMP=\angle BNA$. No tā seko vajadzīgais.
3. Apzīmējam BC un punktā A vilktās pieskares krustpunktu ar S. No ievilktu un hordas - pieskares leņķu īpašībām seko $\angle SAC = \angle ABC = \angle EDC$. Tāpēc $\angle SAD = \angle SDA$, tātad ΔASD - vienādsānu un S atrodas uz AD vidusperpendikula, t.i., uz EF, k.b.j.
4. No dotā seko, ka $BP \| CQ$. Attālums starp šīm paralēlajām taisnēm ir $AB\cdot\sin60° + AC\cdot\sin60°$. Atliek ievērot, ka šis attālums nav lielāks par PQ.
5. Doto vienādību pārveidojam par $c:(a+b) = a:c$. Uz stara BC atliekam tādu punktu D, ka $BD = b + a$. Tad $\Delta CBA \sim \Delta ABD$, tāpēc $\angle CAB = \angle ADB$. Tā kā $CD = b$, tad $\angle DAC = \angle ADC$. Tāpēc no ārējā leņķa formulas $\angle ACB = \angle ADB + \angle CAD = 2\angle CAB$ un $\angle BAC:\angle ACB = 1:2$.
6. Pie $n = 4$ Fredekam nav taisnība (skat. 1.zīm.).



1. zīm.

Pie $n \geq 5$ pieņemsim, ka Frederikam nav taisnība. No Dirihlē principa seko, ka diviem viesiem A un B ir vienāds paziņu skaits. No pieņēmuma seko: atkarībā no tā, vai A un B ir vai nav paziņas, tiem katram ir vai nu $\frac{1}{2}n$, vai $\frac{1}{2}n-1$ paziņas. Pie nepāra n tas uzreiz dod pretrunu. Apskatām pāra n, $n \geq 6$. Viesu kopā bez A un B var atrast tādus divus (C un D), kam šajā samazinātajā kopā ir vienāds paziņu skaits. Katrs no viņiem pazīst tieši vienu no A un B. Tāpēc arī C un D katram ir vai nu $\frac{1}{2}n$, vai $\frac{1}{2}n-1$ paziņas. Līdzīgi pētot viesu kopu bez A; B; C; D, kas satur vismaz 2 viesus, atrodam tādus E un F, kam katram ir vai nu $\frac{1}{2}n$, vai $\frac{1}{2}n-1$ paziņas. No A; B; C; D; E; F var atrast trīs ar vienādu paziņu skaitu; no šiem trim noteikti var atrast divus mums vajadzīgos, pārbaudot visus viņu pazīšanās variantus savā starpā.
7. **I** Pārslēdzot katru slēdzi tieši vienu reizi, visu slēdžu stāvokļi būs mainījušies uz pretējo sākotnējam.

   Pierādīsim to:

   Apskatām patvaļīgu slēdzi X. Šī slēdža stāvoklis augstāk aprakstītajā procesā ir mainījies tieši 89 reizes:

   a) pārslēdzot pašu slēdzi X,

   b) pārslēdzot jebkuru no 39 slēdžiem, kas ar X ir vienā kolonnā,

   c) pārslēdzot jebkuru no 49 slēdžiem, kas ar X ir vienā rindā.

   Tā kā $1+39+49=89$ ir nepāra skaitlis, tad gala rezultātā slēdzis X ir mainījis savu stāvokli uz pretējo sākotnējam.

   Acīmredzot, šādā ceļā rīkojoties, mēs veicam $40\cdot50=2000$ pārslēgšanas.

II Tagad parādīsim, ka ar mazāk nekā 2000 pārslēgšanām uzdevumā prasītais nav sasniedzams.

Pieņemsim no pretējā, ka kāds slēdzis X vispār netiek pārslēgts nevienu reizi, bet visi slēdži savu stāvokli ir mainījuši no izslēgta uz ieslēgtu. Sadalīsim pārējos slēdžus trīs grupās:

A: tie 49 slēdži, kas ar X ir vienā rindā,

B: tie 39 slēdži, kas ar X ir vienā kolonnā,

C: tie slēdži, kas nav ne vienā rindā, ne vienā kolonnā ar X.

Pieņemsim, ka šo grupu slēdži kopumā tiek pārslēgti attiecīgi α, β un γ reizes. Tad slēdzis X maina savu stāvokli $\alpha+\beta$ reizes. Tā kā X jākļūst no izslēgta par ieslēgtu tad

(1) $\alpha+\beta$ ir nepāra skaitlis

Grupas A slēdžus ietekmē α pārslēgšanas (katra no tām rada 49 slēdžu stāvokļu maiņas šajā grupā) un γ pārslēgšanas (katra no tām rada vienu slēdža stāvokļa maiņu šajā grupā). Kopā grupā A notikušas $49\alpha+\gamma$ slēdžu stāvokļu maiņas. Tā kā katrs no 49 (nepāra daudzums!) slēdžiem grupā A mainījis savu stāvokli nepāra skaitu reižu (citādi tas nebūtu kļuvis no izslēgta par ieslēgtu), tad

(2) $49\alpha+\gamma$ ir nepāra skaitlis

Līdzīgi spriežot par grupu B, iegūstam, ka

(3) $39\beta+\gamma$ ir nepāra skaitlis

No (1), (2) un (3) iegūstam, ka

$(\alpha+\beta)+(49\alpha+\gamma)+(39\beta+\gamma)=50\alpha+40\beta+2\gamma=2(25\alpha+20\beta+\gamma)$ ir nepāra skaitlis kā trīs nepāra skaitļu summa. Bet tā ir pretruna. Tātad sākotnējais pieņēmums ir nepareizs un katrs slēdzis jāpārslēdz vismaz 1 reizi; tātad nepieciešamas vismaz $40\cdot 50=2000$ pārslēgšanas.

8. Pieņemsim, ka Fredeks atgriezies atpakaļ n reizes, tātad atvadījās no draugiem n+1 "sērijās". Saskaņā ar doto eksistē draugs, no kura viņš atvadījās tikai pēdējā sērijā; no tā Fredeks aizmirsa atvadīties n reizes. Tā kā no visiem citiem draugiem Fredeks aizmirsa atvadīties dažādu skaitu reižu, tad aizmiršanu bija vismaz $0+1+...+11+n = 66+n$. No šejienes $3(n+1)\geq 66+n$ un $n\geq 32$ (n - naturāls skaitlis).
Sekojošais piemērs, kurā draugi apzīmēti ar skaitļiem, parāda, kā Fredekam "aizmirst" savus draugus, lai vērtība n = 32 realizētos.

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{ccc} 13 & 11 & 10 \\ & \dots & \\ 13 & 11 & 10 \end{array}\right\}\text{10 reizes} \\
\begin{array}{ccc} 13 & 11 & 9 \end{array} \\
\left.\begin{array}{ccc} 13 & 8 & 9 \\ & \dots & \\ 13 & 8 & 9 \end{array}\right\}\text{8 reizes} \\
\left.\begin{array}{ccc} 13 & 7 & 6 \\ & \dots & \\ 13 & 7 & 6 \end{array}\right\}\text{6 reizes} \\
\begin{array}{ccc} 13 & 7 & 5 \end{array} \\
\left.\begin{array}{ccc} 13 & 4 & 5 \\ & \dots & \\ 13 & 4 & 5 \end{array}\right\}\text{4 reizes} \\
\begin{array}{ccc} 13 & 3 & 2 \\ 13 & 3 & 2 \\ 11 & 3 & 1 \end{array}
\end{array}
$$

9. Jau 2.zīm. parādītais rūtiņu apvienojums pa pāriem parāda, ka no m rūtiņām var aizlēkt kopā uz vismaz m dažādām rūtiņām (zīmējumā k = 3).

1	4	7	10	13	16
2	5	8	11	14	17
3	6	9	12	15	18
4	1	10	7	16	13
5	2	11	8	17	14
6	3	12	9	18	15

2.zīm.

10. Izdarot gājienu, uz tāfeles esošo skaitļu starpība samazinās divreiz. Tā vienmēr ir naturāls skaitlis un sākumā ir mazāka par $2^{11} = 2048$. Tāpēc gājienu nevar izdarīt vairāk nekā 10 reizes. Ja sākumā uz tāfeles ir skaitļi 2000 un 976, var izdarīt tieši 10 gājienus ($2000 - 976 = 1024 = 2^{10}$).
11. Tā kā $1<2<4<8<16<80<400<2000$ un $a_n \geq 2a_m$, ja $n>m$ un n dalās ar m, tad $a_{2000} \geq 2^7 = 128$. Virkne $a_1 = 1$; $a_n = 2^{K_1+K_2+...+K_m}$, ja $n = p_1^{K_1} p_2^{K_2} ... p_m^{K_m}$ ($p_1, ..., p_m$ - dažādi pirmskaitļi), apmierina uzdevuma nosacījumus, un tai $a_{2000} = 2^7$, jo $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Tāpēc 128 ir mazākā iespējamā a_{2000} vērtība.
12. Ja $x_1, x_2, ..., x_k$ atšķiras viens no otra tikai ar pēdējo ciparu, tad (apzīmējot to kopējo ciparu virkni ar y) $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{y0} + \frac{1}{y1} + \ldots + \frac{1}{y9} < 10 \cdot \frac{1}{y0} = \frac{1}{y}$. Tāpēc, aizstājot $x_1; x_2; ...; x_k$ ar vienu vienīgu y, apskatāmā summa palielināsies. Viegli redzēt, ka jaunajai skaitļu sistēmai saglabājas uzdevumā minētā īpašība. Tāpēc, turpinot līdzīgas aizstāšanas, iegūstam
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9} < 3.$$
13. Apzīmēsim $a_i = k + di$, $i = 1; 2; ...; n$. Tad k dalās ar 1; 2; ...; n-1, bet nedalās ar n. Ja $n = a \cdot b$, kur $a>1$; $b>1$; $LKD(a,b) = 1$, tas acīmredzami nav iespējams.
14. <u>Atbilde</u>: n = 2000. Pārbaudi veic tieši. To, ka citu atbilžu nav, pierāda, ar pilnās pārlases metodi risinot vienādojumu
$$p_1^{K_1} p_2^{K_2} ... p_m^{K_m} = 100 \cdot (K_1+1)(K_2+1) \cdot ... \cdot (K_m+1).$$
Galvenais risinājumā lietotais paņēmiens ir abu pušu salīdzināšana pēc lieluma.
15. Apgalvojumu pierāda ar matemātisko indukciju pēc k atsevišķi vērtībām $n = 6k+1$ un $n = 6k + 5$.
16. Novelkam nogriežņus OA = a, OB = b, OC = c tā, ka $\angle AOB = \angle BOC = 60^o$, $\angle AOC = 120^o$. Pierādāmā nevienādība izsaka acīmredzamu faktu $AB + BC \geq AC$.
17. Apzīmējam $x+z=A$, $y+t = B$. Tad vienādojumu sistēma pieņem formu $A+B = 5$, $AB = 4$, $Bxz + Ayt = 3$, $Bxz \cdot Ayt = -4$. Atrisinājumi redzami tabulā:

A	B	Bxz	Ayt	x,z	y,t
1	4	-1	4	$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$	2
1	4	4	-1	-	-
4	1	-1	4	-	-
4	1	4	-1	2	$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

18. Vienādojumu pārraksta formā $\frac{1}{x}\left(x-\sqrt{2x+1}\right)^2+\frac{1}{y}\left(y-\sqrt{2y+1}\right)^2=0.$ Tā kā x>0 un y>0, tad $x-\sqrt{2x+1}=y-\sqrt{2y+1}=0,$ no kurienes x = y = 1 + $\sqrt{2}$.
19. Nevienādību var pierādīt standartceļā ar matemātisko indukciju. Cita iespēja - pārrakstīt to formā $\left(t^2\right)^n \geq \left(t^2-(2t-1)\right)^n+(2t-1)^n$ un izmantot Ņūtona binoma formulu.
20. Aplūkojam lielumu x_n^2. Katram skaitītājā esošajam kvadrātam a^2 pielietojot nevienādību $a(a+2)<(a+1)^2$, pēc saīsināšanas iegūstam $x_n^2<2+\frac{4}{n}$. Līdzīgi pārveidojot saucēju, iegūstam $x_n^2>2+\frac{1}{n}$. Tāpēc $\frac{1}{n}<x_n^2-2<\frac{4}{n}$, no kurienes $\frac{1}{n\left(x_n+\sqrt{2}\right)}<x_n-\sqrt{2}<\frac{4}{n\left(x_n+\sqrt{2}\right)}$. No iepriekšpierādītā $\sqrt{3}<x_n<\sqrt{6}$, kas dod vajadzīgo.

A.Andžāns