**9. komandu olimpiāde matemātikā “Baltijas ceļš 98”**
**Varšavā, 1998. gada 8. novembrī**

**Uzdevumi.**

**1.**Atrodiet visas divu argumentu funkcijas f, kuru argumenti x un y un vērtības f (x,y) ir pozitīvi veseli skaitļi un kas visiem pozitīviem veseliem skaitļiem x un y apmierina sekojošas sakarības:

$f(x,x)=x$

$f(x,y)=f(y,x)$

$(x+y)\,f(x,y)=y\,f(x,x+y)$.

**2.**Pozitīvu veselu skaitļu trijnieku (a,b,c) sauc par kvazipitagorisku, ja eksistē trijstūris ar malu garumiem a, b, c un malas c pretleņķi 120°. Pierādiet: ja (a,b,c) ir kvazipitagorisks trijnieks, tad c dalās ar kādu pirmskaitli, kas lielāks nekā 5.

**3.**Atrisināt veselos pozitīvos skaitļos vienādojumu

$2x^2+5y^2=11(xy-11)$.

**4.**Dots, ka P ir polinoms ar veseliem koeficientiem. Pieņemsim, ka tā vērtības P(n) ir veseli pozitīvi trīsciparu skaitļi, ja n=1;2;3;…;1998. Pierādīt, ka polinomam P nav veselu sakņu.

**5.**Pieņemsim, ka a ir nepāra cipars, bet b – pāra cipars. Pierādīt, ka katram veselam pozitīvam skaitlim n eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis, kas dalās ar $2^n$ un kura decimālais pieraksts nesatur nekādus citus ciparus nekā a un b.

**6.**Pieņemsim, ka P ir sestās pakāpes polinoms, bet a un b – tādi reāli skaitļi, ka $0<a<b$. Zināms, ka $P(a)=P(-a)$, $P(b)=P(-b)$ un $P'(0)=0$. Pierādīt, ka visiem reāliem x pastāv vienādība $P(x)=P(-x)$.

**7.**Atrast visas funkcijas f, kas definētas visiem reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un visiem reāliem x un y apmierina vienādību

$f(x)+f(y)=f(f(x)*f(y))$.

**8.**Apzīmēsim

$P_k(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}$

Pierādīt, ka visiem veseliem pozitīviem n un visiem reāliem x pastāv vienādība

$$C_n^1\cdot P_1(x)+C_n^2\cdot P_2(x)+\ldots+C_n^i\cdot P_i(x)+\ldots+C_n^n\cdot P_n(x)=2^{n-1}\cdot P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

**9.**Dots, ka $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$. Skaitļi $\gamma$ un $\delta$ apmierina nosacījumus:

a) skaitlis tg $\gamma$ ir skaitļu tg $\alpha$ un tg $\beta$ vidējais aritmētiskais, pie tam $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$;

b) skaitlis $\dfrac{1}{\cos\delta}$ ir skaitļa $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ un $\dfrac{1}{\cos\beta}$ vidējais aritmētiskais, pie tam $0<\delta<\dfrac{\pi}{2}$ .

Pierādīt, ka $\gamma<\delta$.

**10.** Dots, ka n – pāra skaitlis un n>4. Riņķa līnijā ar rādiusu 1 ievilkts regulārs n-stūris un regulārs (n-1)-stūris. Katrai n-stūra virsotnei atrodam mazāko no to loku garumiem, kas savieno šo n-stūra virsotni ar (n-1)-stūra virsotnēm. Apzīmējam visu šo n mazāko garumu summu ar S. Pierādīt, ka S atkarīga tikai no n, bet nav atkarīga no abu daudzstūru savstarpējā novietojuma.

**11.** Ar a, b, c apzīmējam trijstūra malu garumus, bet ar R – tā apvilktās riņķa līnijas rādiusa garumu. Pierādīt, ka

$$R \geq \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}$$

Kad pastāv vienādība?

**12.** Zināms, ka trijstūrī ABC pastāv vienādība $\angle BAC=90°$. Punkts D atrodas uz malas BC, un pastāv vienādība $\angle BDA=2\angle BAD$. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{AD}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}\right).$$

**13.** Izliektā piecstūrī ABCDE malas AE un BC ir paralēlas un $\angle ADE=\angle BDC$. Diagonāles AC un BE krustojas punktā P. Pierādīt, ka $\angle EAD=\angle BDP$ un $\angle CBD=\angle ADP$.

**14.** Trijstūrī ABC zināms, ka AB<AC. Taisne, kas iet caur B un ir paralēla AC, krusto trijstūra virsotnes A ārējā leņķa bisektrisi punktā D. Taisne, kas iet caur C un ir paralēla AB, krusto trijstūra virsotnes A ārējā leņķa bisektrisi punktā E.

Punkts F atrodas uz malas AC un apmierina vienādību FC=AB. Pierādiet, ka DF=FE.

**15.** Dots šaurleņķu trijstūris ABC. Punkts D ir tā perpendikula pamats, kas no A novilkts pret BC. Punkts E pieder nogrieznim AD, pie tam izpildās vienādība

$$\frac{AE}{ED}=\frac{CD}{DB}$$

Punkts F ir tā perpendikula pamats, kas novilkts no D pret BE.

Pierādīt, ka $\angle AFC=90°$.

**16.** Aplūkosim "šaha galdiņu", kas sastāv no 13×13 laucīņiem. Vai to var pārklāt ar četrdesmit divām figūrām, kuru izmēri ir 4×1, tā, lai tikai centrālais "šaha galdiņa" laucīņš paliktu nepārklāts? (Mēs pieņemam, ka katra figūra pārklāj tieši četrus laucīņus).

**17.** Dots, ka n un k ir pozitīvi veseli skaitļi. Mūsu rīcībā ir $n \cdot k$ vienāda izmēra priekšmeti un k kastes; katrā kastē var ievietot n priekšmetus. Katrs priekšmets ir nokrāsots vienā no k dažādām krāsām. Pierādīt, ka priekšmetus var izvietot kastēs tā, lai katrā kastē būtu augstākais divu krāsu priekšmeti.

**18.** Atrodiet visus veselus pozitīvus skaitļus n, kuriem eksistē kopa S ar sekojošām īpašībām:

a) kopa S sastāv no pozitīviem veseliem skaitļiem, kas visi mazāki par $2^{n-1}$,

b) ja A un B – divas dažādas kopas S apakškopas, tad visu A elementu summa atšķiras no visu B elementu summas.

**19.** Divās galda tenisa komandās katrā ir pa 1000 spēlētājiem. Katrs vienas komandas spēlētājs spēlēja ar katru otras komandas spēlētāju tieši vienu reizi (galda tenisā neizšķirtu nav). Pierādiet, ka eksistē desmit spēlētāji no vienas un tās pašas komandas ar īpašību: katrs otras komandas spēlētājs zaudējis vismaz vienam no šiem desmit.

**20.** Sacīsim, ka vesels pozitīvs skaitlis m pārklāj skaitli 1998, ja cipari 1, 9, 9, 8 šajā secībā sastopami skaitļa m pierakstā. (Piemēram, 2**1**59**9**36**98** pārklāj skaitli 1998, bet 213326798 – nepārklāj.) Ar k(n) apzīmēsim tādu veselu pozitīvu n-ciparu skaitļu skaitu, kuri pārklāj skaitli 1998 un nesatur savā pierakstā nulles ($n \geq 5$). Kādu atlikumu iegūst, k(n) dalot ar 8?