Jauno matemātiķu konkurss
2016./2017. mācību gads

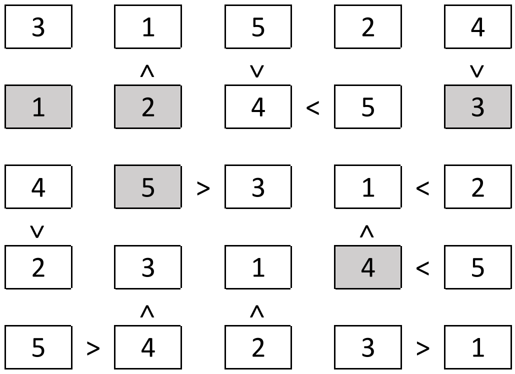
1. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Nevienādību mīkla

Pabeidz mīklu, katrā rindiņā un kolonnā tieši vienu reizi ierakstot ciparus no 1 līdz 5. Ievēro, ka jāizpildās nevienādībām starp cipariem (rūtiņām)!

Atrisinājums

Skat. 1. att.



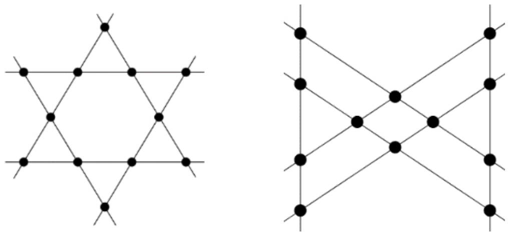
1. att.

2. Kastaņu spēles

Kādā saulainā rudens dienā mazais Miķelis salasīja 12 kastaņus un sāka tos uz zemes bīdīt. Viņam tos izdevās novietot tā, ka uz katras no sešām taisnēm ir pa četriem kastaņiem. Parādi divus piemērus, kā Miķelis kastaņus varēja novietot!

Atrisinājums

Iespējami vairāki varianti, divus no tiem skat. 2. att.



2. att.

3. Pirmskaitlis

Saskaitot divus pirmskaitļus, ieguva pirmskaitli p. Saskaitot trīs dažādus pirmskaitļus, arī ieguva to pašu pirmskaitli p. Kāda ir mazākā iespējamā p vērtība?

Atrisinājums

Pirmie 8 pirmskaitļi ir $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

Mazākā iespējamā trīs dažādu pirmskaitļu summa ir $2 + 3 + 5 = 10$, kas nav pirmskaitlis, tātad p noteikti būs lielāks nekā 10. Tā kā vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2 un pārējie pirmskaitļi ir nepāra skaitļi, tad p noteikti ir nepāra skaitlis. Lai divu skaitļu summa būtu nepāra skaitlis, vienam no tiem jābūt pāra skaitlim. Tātad viens no diviem saskaitāmajiem (pirmskaitļiem) ir 2. Tad otram saskaitāmajam jābūt lielākam nekā 8. Ja otrs saskaitāmais ir

- 11, tad abu pirmskaitļu summa $2 + 11 = 13$, taču to nevar iegūt, saskaitot 3 dažādus pirmskaitļus;
- 13, tad abu pirmskaitļu summa ir $2 + 13 = 15$, kas nav pirmskaitlis;

- 17, tad abu pirmskaitļu summa ir 19, ko var iegūt arī kā trīs dažādu pirmskaitļu summu: $19 = 3 + 5 + 11$.

Tātad esam ieguvuši, ka $p = 19$ ir mazākā iespējamā p vērtība.

4. Nauda klases ekskursijai

Lai klase aizbrauktu ekskursijā, tika savākti 420 eiro. Zināms, ka šī summa bija tikai 50, 20 un 10 eiro banknotēs un pavisam bija 20 banknotes. Cik katra veida banknošu varēja būt?

1. atrisinājums

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka no katra veida jābūt vismaz pa vienai banknotei. Ievērojam, ka nevar būt vairāk kā piecas 50 eiro banknotes, jo tad mazākā naudas summa, kas ir iegūstama, izmantojot atlikušās 14 banknotes, ir 150 eiro, jo ir jāizmanto vismaz viena 20 eiro banknote. Tā kā $6 \cdot 50 + 150 = 450 > 420$, tad nevar tikt izmantotas vairāk kā piecas 50 eiro banknotes.

50 eiro banknošu skaits	**Atlikusī naudas summa**	**Atlikušo banknošu skaits**	**20 eiro banknošu skaits**	**10 eiro banknošu skaits**
$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{420 - 50 \cdot} \boldsymbol{n}$	$\mathbf{20 -} \boldsymbol{n}$		
1	370	19	18 Nevar būt lielāks, jo jau $19 \cdot 20 = 380 > 370$. Nevar būt mazāks, jo jau $17 \cdot 20 = 340$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar divām 10 eiro banknotēm.	1
2	320	18	14 Nevar būt lielāks, jo jau $15 \cdot 20 = 300$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar trīs 10 eiro banknotēm. Nevar būt mazāks, jo jau $13 \cdot 20 = 260$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar piecām 10 eiro banknotēm.	4
3	270	17	10 Nevar būt lielāks, jo jau $11 \cdot 20 = 220$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar sešām 10 eiro banknotēm. Nevar būt mazāks, jo jau $9 \cdot 20 = 180$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar astoņām 10 eiro banknotēm.	7
4	220	16	6 Nevar būt lielāks, jo jau $7 \cdot 20 = 140$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar deviņām 10 eiro banknotēm. Nevar būt mazāks, jo jau $5 \cdot 20 = 100$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar vienpadsmit 10 eiro banknotēm.	10
5	170	15	2 Nevar būt lielāks, jo jau $3 \cdot 20 = 60$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar divpadsmit 10 eiro banknotēm. Nevar būt mazāks, jo jau $1 \cdot 20 = 20$ un atlikušo naudas summu nevar iegūt ar četrpadsmit 10 eiro banknotēm.	13

Tātad esam ieguvuši, ka ir iespējami pieci dažādi varianti, cik katra veida banknošu varēja būt:

- 1 banknote 50 eiro vērtībā, 18 banknotes 20 eiro vērtībā un 1 banknote 10 eiro vērtībā;

- 2 banknotes 50 eiro vērtībā, 14 banknotes 20 eiro vērtībā un 4 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 3 banknotes 50 eiro vērtībā, 10 banknotes 20 eiro vērtībā un 7 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 4 banknotes 50 eiro vērtībā, 6 banknotes 20 eiro vērtībā un 10 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 5 banknotes 50 eiro vērtībā, 2 banknotes 20 eiro vērtībā un 13 banknotes 10 eiro vērtībā.

2. atrisinājums

No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka no katra veida jābūt vismaz pa vienai banknotei. Apzīmēsim 20 eiro banknošu skaitu ar x un 10 eiro banknošu skaitu ar y.

- Ja izmantoja tikai vienu 50 eiro banknoti, tad iegūstam, ka $x+y=19$ un $20x+10y=370$. Otro vienādību izdalot ar 10, iegūstam $2x+y=37$ jeb $x+x+y=37$. Zināms, ka $x+y=19$, tāpēc $x+19=37$ jeb $x=18$. Esam ieguvuši, ka $x=18$ un $y=1$.
- Ja izmantoja divas 50 eiro banknotes, tad $x+y=18$ un $20x+10y=320$. Līdzīgi kā 1. gadījumā iegūstam, ka $x=14$ un $y=4$.
- Ja izmantoja trīs 50 eiro banknotes, tad $x+y=17$ un $20x+10y=270$. Līdzīgi kā 1. gadījumā iegūstam, ka $x=10$ un $y=7$.
- Ja izmantoja četras 50 eiro banknotes, tad $x+y=16$ un $20x+10y=220$. Līdzīgi kā 1. gadījumā iegūstam, ka $x=6$ un $y=10$.
- Ja izmantoja piecas 50 eiro banknotes, tad $x+y=15$ un $20x+10y=170$. Līdzīgi kā 1. gadījumā iegūstam, ka $x=2$ un $y=13$.
- Ja izmantotu sešas 50 eiro banknotes, tad mazākā naudas summa, kas ir iegūstama, izmantojot 14 atlikušās banknotes, ir 150 eiro, jo jāizmanto vismaz viena 20 eiro banknote. Tā kā $6\cdot 50+150=450>420$, tad nevar tikt izmantotas vairāk kā piecas 50 eiro banknotes.

Tātad esam ieguvuši, ka ir iespējami pieci dažādi varianti, cik katra veida banknošu varēja būt:

- 1 banknote 50 eiro vērtībā, 18 banknotes 20 eiro vērtībā un 1 banknote 10 eiro vērtībā;
- 2 banknotes 50 eiro vērtībā, 14 banknotes 20 eiro vērtībā un 4 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 3 banknotes 50 eiro vērtībā, 10 banknotes 20 eiro vērtībā un 7 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 4 banknotes 50 eiro vērtībā, 6 banknotes 20 eiro vērtībā un 10 banknotes 10 eiro vērtībā;
- 5 banknotes 50 eiro vērtībā, 2 banknotes 20 eiro vērtībā un 13 banknotes 10 eiro vērtībā.

5. Vai kāds mānās?

Trīs minioni – apņēmīgais Kevins, dumpīgais Stjuarts un mazais Bobs – sēž katrs uz sava krēsla.

Kevins: “Es esmu vairāk nekā divas reizes tālāk no Stjuarta nekā no Boba.”

Stjuarts: “Es esmu vairāk nekā divas reizes tālāk no Boba nekā no Kevina.”

Bobs: “Es esmu vairāk nekā divas reizes tālāk no Stjuarta nekā no Kevina.”

Zināms, ka vismaz divi no viņiem saka patiesību. Vai kāds noteikti mānās? Ja mānās, tad noskaidro, kurš tas ir!

Atrisinājums

Apzīmēsim attālumu starp Kevinu un Stjuartu ar KS, attālumu starp Stjuartu un Bobu ar SB un attālumu starp Kevinu un Bobu ir KB.

No dotajiem apgalvojumiem izriet, ka

$$KS > 2\cdot KB \qquad (1)$$
$$SB > 2\cdot KS \qquad (2)$$
$$SB > 2\cdot KB \qquad (3)$$

Pakāpeniski pārveidojot nevienādību (2), iegūstam

$SB > \mathbf{2\cdot KS}$

$SB > KS + \boldsymbol{KS}$ (izmantojam nevienādību (1))

$SB > KS + \mathbf{2\cdot KB}$

$$SB > KS + KB + KB$$
$$SB > KS + KB$$

Tā kā SB, KS un KB ir trijstūra malas, tad iegūtā nevienādība ir pretrunā ar trijstūra nevienādību (trijstūra katras malas garums ir mazāks nekā abu pārējo malu garumu summa). Tā kā izmantojām nevienādības (1) un (2), tad kāda no tām ir aplama, tas ir, vai nu Kevins, vai Stjuarts noteikti mānās.

Izmantojot nevienādības (2) un (3) iegūstam

$$SB + SB > 2 \cdot KS + 2 \cdot KB$$
$$2 \cdot SB > 2 \cdot KS + 2 \cdot KB$$
$$SB > KS + KB$$

Atkal esam ieguvuši nevienādību, kas ir pretrunā ar trijstūra nevienādību. Tā kā izmantojām nevienādības (2) un (3), tad kāda no tām ir aplama, tas ir, vai nu Stjuarts, vai Bobs noteikti mānās.

Tā kā ir dots, ka vismaz divi apgalvojumi ir patiesi, tad vienīgā iespēja ir, ka Kevins un Bobs saka patiesību, bet Stjuarts mānās.