„Profesora Cipariņa kluba” 2016./2017. mācību gada

2. nodarbība. **Uzdevumu īsi atrisinājumi.**

1. Maģiskais seši

Līva ir aizrāvusies ar dažādiem maģiskiem rituāliem un neparastām sakarībām. Arī matemātikas stundas laikā viņai nedeva mieru sakarības ar ciparu 6. Viņa vēlējās pierādīt, ka cipars 6 ir ļoti īpašs un maģisks, jo to ir iespējams iegūt no visiem pārējiem cipariem atsevišķi, ja katru izmantotu tieši trīs reizes. Lai no trīs citiem cipariem iegūtu ciparu seši, viņa varēja izmantot:

- saskaitīšanu;
- atņemšanu;
- reizināšanu;
- dalīšanu;
- kvadrātsaknes vilkšanu;
- faktoriālu;
- iekavas.

Viņas draudzenes Zane un Jana gan nebija drošas, ka cipars seši tiešām ir tik maģisks. Palīdzi Līvai pārliecināt savas draudzenes un parādi, kā var iegūt vērtību seši katrā no 10 gadījumiem!

0	0	0	=	6
1	1	1	=	6
2	2	2	=	6
3	3	3	=	6
4	4	4	=	6
5	5	5	=	6
6	6	6	=	6
7	7	7	=	6
8	8	8	=	6
9	9	9	=	6

Piezīmes. 1. Par skaitļa a aritmētisko kvadrātsakni sauc tādu nenegatīvu skaitli, kuru kāpinot kvadrātā, iegūst doto skaitli a. To apzīmē $\sqrt{a}$ *.Piemēram,* $\sqrt{16} = 4$*, jo* $4^2 = 16$.

2. Visu naturālo skaitļu no 1 līdz n *reizinājumu sauc par skaitļa* n *faktoriālu un apzīmē ar* $n!$*. Tātad* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$*. Piemēram,* $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$*. Tiek pieņemts, ka* $0! = 1$.

3. Līva neizmanto citas darbības zīmes un neraksta klāt citus skaitļus.

Atrisinājums

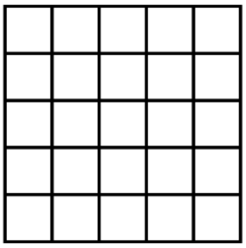
Viens veids, kā iegūt prasītās vienādības, ir šāds:

$$(0! + 0! + 0!)! = 6$$
$$(1 + 1 + 1)! = 6$$
$$2 + 2 + 2 = 6$$
$$3 \cdot 3 - 3 = 6$$
$$\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 6$$
$$5 + 5 : 5 = 6$$
$$6 + 6 - 6 = 6$$
$$7 - 7 : 7 = 6$$
$$\left(\sqrt{8 : 8 + 8}\right)! = 6$$
$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{9} = 6$$

2. Meistars Dzintars

Flīžu meistars Dzintars šodien pabeigs darbus Krūmiņu vannas istabā. Telpas grīdas izmērs ir 5×5 kvadrātiskas flīzes (skat. 1. att.). Dzintaram ir jānoklāj ar šuvotāju (speciāla viela) spraugas starp šuvēm, lai visas šuves būtu aizpildītas. Šuvotājs ir jāliek arī starp flīzēm un sienām. Lai padarītu darbu interesantāku, viņš nolēmis šuvotāju likt katru reizi pa viena kvadrāta perimetru. Kāds ir mazākais kvadrātu skaits, kuru malas Dzintaram ir jānoklāj ar šuvotāju, lai visas šuves būtu aizpildītas pilnībā un darbs Krūmiņu mājās būtu padarīts?

Piezīme. Ja Dzintars izvēlas kvadrātus, kuru malas pārklājas, viņš pārklājuma vietās atkārtoti neliek šuvotāju.



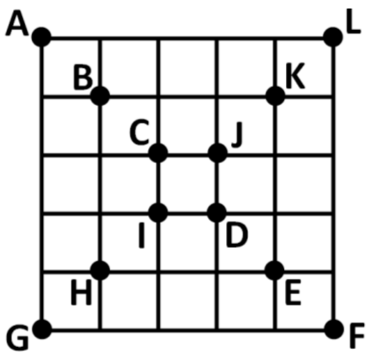
1. att.

Atrisinājums

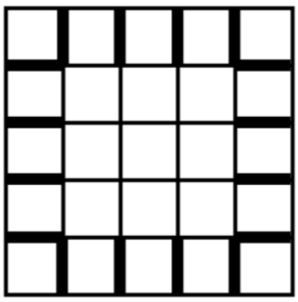
Mazākais kvadrātu skaits, kuru malas Dzintaram ir jānoklāj ar šuvotāju, ir **8**.

To var izdarīt, piemēram, noklājot ar šuvotaju kvadrātu malas, kuru diagonāles ir AE, AD, CF, BF, HL, IL, JG un KG (skat. 2. att.).

Pierādīsim, ka mazāk kvadrātu nevar izvēlēties. Ievērojam, ka, izvēloties vienu kvadrātu, ar šuvotāju var augstākais aizpildīt tikai divas no sešpadsmit 3. attēlā atzīmētajām šuvēm. Tāpēc nepieciešami vismaz $\frac{16}{2} = 8$ kvadrāti.



2. att.



3. att.

3. Kur vakaros paliek saule?

Dauka nolēma noskaidrot, kur vakaros paliek saule. Lai to izdarītu, viņš iekāpa laivā un sāka vienmērīgi irties pa Baltijas jūru uz rietošās saules pusi. Jūra ir mierīga un straume ir niecīga. Daukas ceļš iet paralēli prāmju maršrutam. Ik pēc 30 minūtēm viņš sastop pretim braucošu prāmi, un ik pēc 36 minūtēm kāds prāmis viņu apdzen. Ir zināms, ka prāmju kursēšanas biežums abos virzienos ir vienāds un tie visi kustās ar nemainīgiem ātrumiem. Cik liels ir intervāls starp prāmju atiešanas laikiem no viena galapunkta, izteikts sekundēs?

Atrisinājums

Attālumu metros starp diviem prāmjiem, kas pa līniju kursē viens aiz otra, apzīmēsim ar s, prāmja ātrumu m/min – ar x, bet Daukas ātrumu m/min – ar y. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\frac{s}{x+y}=30,\quad \frac{s}{x-y}=36 \quad\Rightarrow\quad \frac{(x+y)}{s}=\frac{1}{30},\quad \frac{x-y}{s}=\frac{1}{36}$$

Jānosaka laika intervāls $\frac{s}{x}$ sekundēs. Saskaitot vienādojumus, iegūstam

$$\frac{2x}{s}=\frac{11}{180} \qquad \text{jeb} \qquad \frac{s}{x}=\frac{360}{11}=32\frac{8}{11}\ min=1963\frac{7}{11}\ s.$$

Tātad prāmji atiet no galapunktiem ik pēc $\mathbf{1963\frac{7}{11}}$ **sekundēm**.

4. Mandarīnu steiga

Šovakar pie Zigmāra ir atbraukusi viņa brāļa meitiņa Elza. Elzai ļoti garšo mandarīni, tāpēc Zigmārs grib viņu ar tiem pacienāt. Viņam virtuvē stāv 10 grozi ar mandarīniem. Grozos ir no 11 līdz 20 mandarīniem – katrā grozā cits skaits, bet viņš nezina, kurā grozā ir cik mandarīnu. Deviņos grozos katra mandarīna masa ir 60 grami, bet vienā grozā katra mandarīna masa ir 70 grami. Zigmārs grib Elziņai dot vienu visskaistāko un smagāko mandarīnu. Diemžēl Zigmāram nav daudz laika, jo viņš zina, ka Elza ir saodusi mandarīnus un jau nāk uz virtuves pusi. Kad Elza būs nokļuvusi virtuvē, viņa ņems tuvāko no mandarīniem un Zigmāra labie nodomi izpaliks. Labi, ka Zigmārs ir veikls zēns un ātri māk rēķināt galvā. Zigmāram virtuvē atrodas arī elektroniskie svari (tie uzlikto svaru parāda gramos) un vēl viens liels grozs, kurš sver 200 grami. Kā, izmantojot svarus tikai vienu reizi, Zigmārs paspēja atrast Elziņai vissmagāko mandarīnu?

Atrisinājums

Zigmārs to var paveikt, piemēram, šādi:

- viņš galvā sanumurē grozus no 1 līdz 10,
- paņem vienu ābolu no 1. groza,
- paņem divus ābolus no 2. groza,
- paņem trīs ābolus no 3. groza,
- …
- paņem desmit ābolus no 10. groza.

Zigmārs tukšajā grozā būs savācis $1+2+3+\cdots+10=\frac{(1+10)\cdot 10}{2}=55$ ābolus.

Ja tie visi svērtu 60 g katrs, tad svari rādītu $55\cdot 60+200=3500$ g. Bet svari noteikti rādīs vairāk. Tad Zigmārs no nolasītā svaru rādījuma atņems 3500 g un izdalīs iegūto skaitli ar 10. Rezultātā viņš iegūs kādu skaitli no 1 līdz 10, kas arī norādīs uz grozu ar vissmagākajiem āboliem. Piemēram, ja svari rādītu 3550 g, tad Zigmārs zinātu, ka 5. grozs ir meklētais grozs.

5. Starpbrīdis

Juris un Andris nolēma uzspēlēt šaha partiju. Viņi sarunāja, ka zaudētājs uzvarētājam pastāstīs kādu matemātikas uzdevumu. Šaha partiju uzvarēja Juris. Andris daudz neskuma un, nerādot Jurim, ierakstīja katrā šaha galdiņa luciņā naturālu skaitli no 1 līdz 64 (katrā citu). Jura uzdevums ir noskaidrot, kurā luciņā kurš no skaitļiem ir ierakstīts. Lai to paveiktu, Juris var uzdot Andrim jautājumus, izmantojot citu šaha galdiņu. Jautājumi skan šādi: „Kādi skaitļi ir ierakstīti šajā luciņu grupā uz Tava šaha galda?” (kur luciņu grupa ir jebkuri brīvi izvēlēti luciņi uz šaha galdiņa, tie var nebūt blakus). Andris uz to atbild, jauktā secība nosaucot skaitļus, kas atrodas uz izvēlētajiem luciņiem uz viņa galdiņa. Kāds mazākais jautājumu skaits Jurim jāuzdod, lai uzzinātu, kāds skaitlis ir ierakstīts katrā luciņā?

Piezīme. Gan Juris, gan Andris katru vakaru ēd daudz biezpiena, tāpēc puišiem ir lieliska atmiņa.

Atrisinājums

Mazākais jautājumu skaits, kas Jurim ir jāuzdod, ir **6 jautājumi**.

Vispirms parādīsim, kā to izdarīt ar 6 jautājumiem. Atzīmēsim, ka Jurim pietiek noskaidrot, kādi skaitļi ierakstīti katrā kolonnā un katrā rindā; tad katrā rūtiņā atrastos vienīgais skaitlis, kas atrodas gan tajā rindā, gan tajā kolonnā, kas satur norādīto rūtiņu. Parādīsim, kā ar 3 jautājumiem noskaidrot, kādi skaitļi ierakstīti katrā rindā (protams, ar kolonnām var rīkoties līdzīgi).

Ar pirmo jautājumu Juris noskaidro, kādi skaitļi ierakstīti 1., 2., 3. un 4. rindā; ar otro -- 1., 2., 5. un 6. rindā; ar trešo -- 1., 3., 5. un 7. rindā. Tagad Jurim ir skaidrs skaitļu izvietojums pa rindām. Piemēram, pirmajā rindā atrodas skaitļi, kas pieder visām nosauktajām grupām, otrajā -- kas pieder pirmajai un otrai grupai, bet nepieder trešajai grupai u.t.t.

Tagad pierādīsim, ka ar 5 jautājumiem nepietiek. Katra rūtiņa var vai nu piederēt rūtiņu grupai, par kuru uzdots jautājums, vai nu nepiederēt tai. Tā kā uzdoti 5 jautājumi, tad katrai rūtiņai ir iespējami $2^5 = 32$ dažādi stāvokļi attiecībā uz piederību jautājumu rūtiņu kopām. Tā kā rūtiņu ir pavisam 64, tad noteikti atradīsies divas rūtiņas, kuras katrai jautājuma kopai pieder vai nepieder vienlaicīgi. Tādā gadījumā, samainot skaitļus, kas ierakstīti šajās rūtiņās, vietām, Andra atbildes nemainīsies, un Juris precīzi noskaidrot situāciju nevarēs.