Jauno matemātiķu konkurss
2016./2017. mācību gads

2. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Ieraksti zīmes!

Starp cipariem **8 7 6 9 2 5 4 3 1** ieraksti aritmētisko darbību zīmes („+”, „–”, „:”, „·”; ne obligāti visas) un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 2016. Ciparu secību mainīt nedrīkst!

Atrisinājums

Der, piemēram, izteiksme $8 \cdot ((7+6) \cdot 9 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 3 + 1) = 2016$.

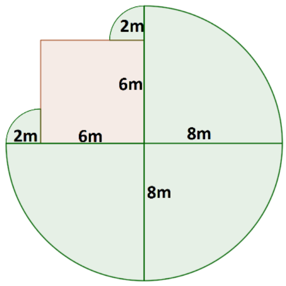
2. Par suni Rūdi

Suns Rūdis uz brītiņu ir piesiets pie dārza mājiņas stūra. Noskaidro, cik liels ir perimetrs laukumam, pa kuru var pārvietoties Rūdis, ja zināms, ka dārza mājiņa ir kā kubs, kuram katras malas garums ir 6 metri, un suņa siksna ir 8 metrus gara.

Atrisinājums

Teritorija, pa kuru Rūdis var pārvietoties ar 8 metru garu siksnu, iekrāsota zaļā krāsā (skat. A1. att.). Tā sastāv no trīs ceturtdaļām riņķa ar rādiusu 8 metri un vēl divu riņķu ceturtdaļām, kuru rādiuss ir 2 metri. Izmantojot riņķa līnijas garuma aprēķināšanas formulu $C = 2\pi r$, kur r ir riņķa līnijas rādiuss, aprēķinām šīs teritorijas perimetru: $6 + 6 + 2 + 2 + \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 16 + 12\pi + \pi + \pi = 16 + 14\pi\ (m)$.

(Ja gribam noteikt aptuveno teritorijas perimetru, tad, ievietojot $\pi \approx 3{,}14$, iegūstam $16 + 14\pi \approx 59{,}96\ (m)$.)



A1. att.

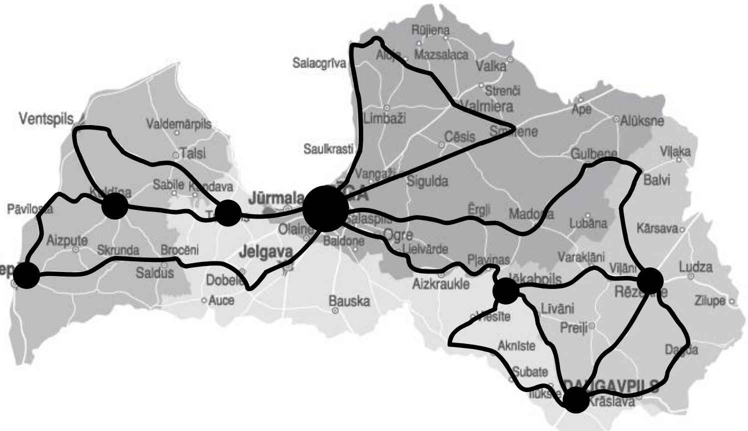
3. Ceļu būvnieks Kristaps

Kristaps strādā ceļu būves uzņēmumā un viņam jāapseko vairāki ceļi. Vai Kristaps var apsekot

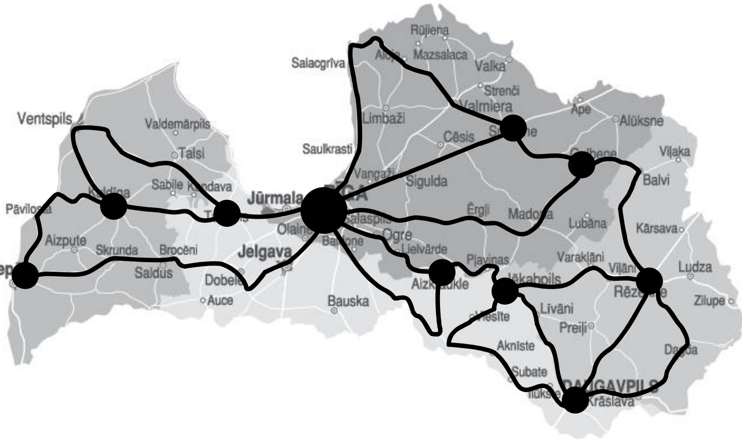
a) 1. att. ar melno līniju izceltos ceļus;

b) 2. att. ar melno līniju izceltos ceļus

tā, lai viņš pārvietotos tikai pa izceltajiem ceļiem, turklāt pa katru tieši vienu reizi?



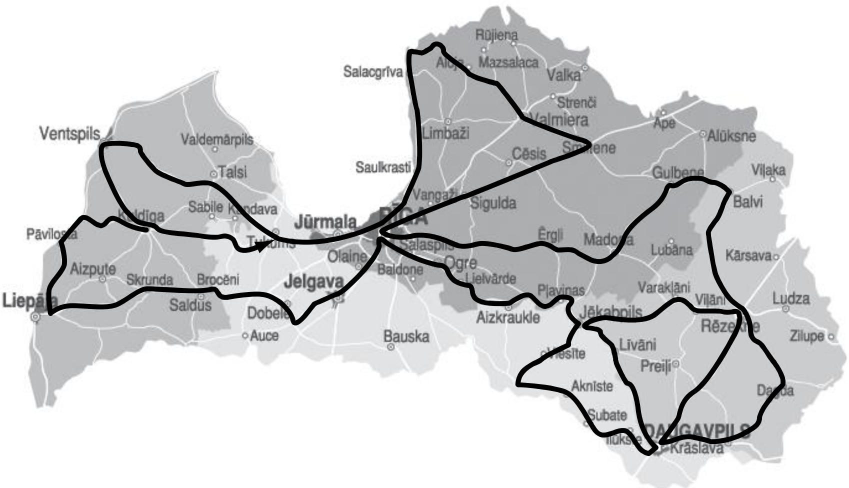
1. att.



2. att.

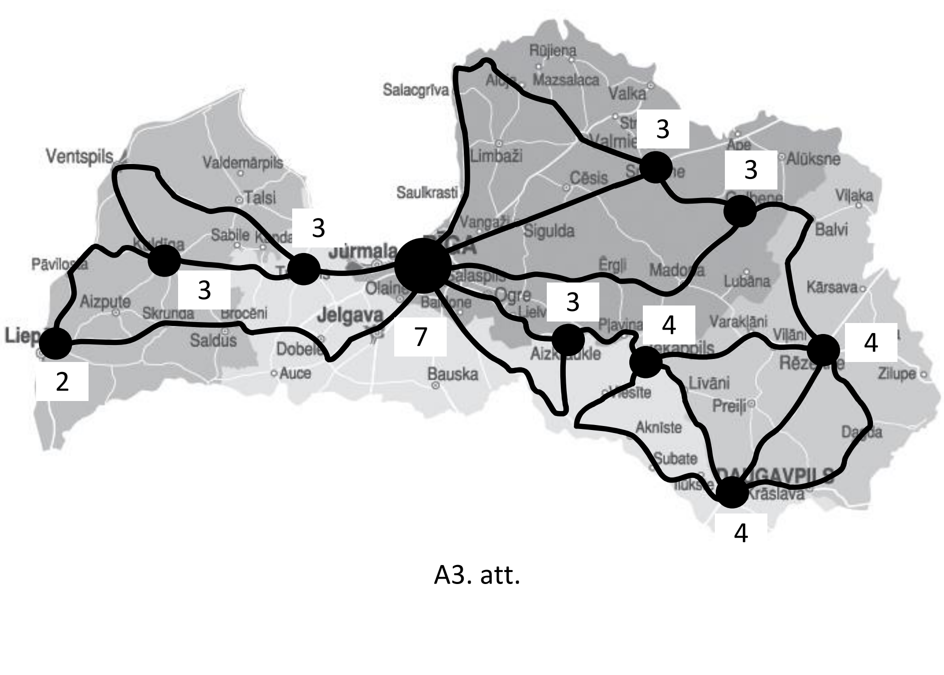
Atrisinājums

a) Jā, skat., piemēram, A2. att., kurā maršruts sākts Kuldīgā, bet beigts – Tukumā.



A2. att.

b) Nē, nevar. Lai to varētu panākt, pilsētas, no kurām iziet nepāra skaits ceļu, nedrīkst būt vairāk kā divas. Ja ir tieši divas pilsētas, no kurām iziet nepāra skaits ceļu, tad vienā no tām mēs varētu maršrutu sākt, bet otrā – beigt, no pārējām pilsētām jāiziet pāra skaitam ceļu, jo, iebraucot pilsētā, mums no tās ir arī jāizbrauc. Dotajā kartē ir vairāk nekā divas pilsētas, no kurām iziet nepāra skaits ceļu (skat. A3. att.), tātad prasītais nav iespējams.



A3. att.

4. Ķīviņš, kurā iesaistītas ozolzīles

Skolotāja lūdza katram skolēnam atnest ozolzīles klases dekorēšanai. Visi skolēni savāca vienādu skaitu zīles, turklāt katrs ne vairāk kā 20. Pa ceļam uz klasi katrs skolēns katram citam meta ar vienu ozolzīli, un visas mestās ozolzīles pazuda. Rezultātā skolēni uz klasi aiznesa 81 ozolzīli. Cik ozolzīļu savāca katrs skolēns pirms ķīviņa?

1. atrisinājums. Tā kā katrs skolēns atnesa vienādu skaitu zīles, tad zīļu skaitam jādalās ar skolēnu skaitu. Tātad skolēnu skaits varētu būt 3, 9, 27 vai 81 (nevar būt tikai viens skolēns, jo tad nevarētu notikt ķīviņš). Ar x apzīmējam zīļu skaitu, ko savāca katrs skolēns pirms ķīviņa, un aplūkojam visas iespējas.

- Ja skolotājai zīles atnesa trīs skolēni, tad pēc ķīviņa viņiem palika $3(x-2)$ zīles. Tātad $3(x-2)=81$ jeb $x-2=27$. No kā iegūstam, ka $x=29$, bet šāds zīļu skaits neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.
- Līdzīgi deviņu skolēnu gadījumā iegūstam vienādojumu $9(x-8)=81$, no kā izriet, ka $x=17$.
- Ja skolēnu skaits ir 27, tad attiecīgais vienādojums ir $27(x-26)=81$ un $x=29$, bet šāds zīļu skaits neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.
- Ja skolēnu skaits ir 81, tad attiecīgais vienādojums ir $81(x-80)=81$ un $x=81$, bet šāds zīļu skaits neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.

Tātad katrs no deviņiem skolēniem salasīja 17 zīles.

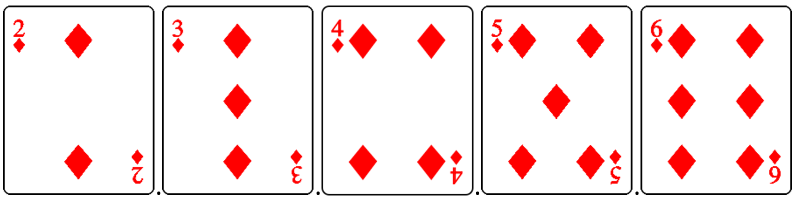
2. atrisinājums. Tā kā katrs skolēns atnesa vienādu skaitu zīles, tad zīļu skaitam jādalās ar skolēnu skaitu. Tātad skolēnu skaits varētu būt 3, 9, 27 vai 81 (nevar būt tikai viens skolēns, jo tad nevarētu notikt ķīviņš).

Skolēnu skaits	Zīļu, ko atnesa katrs skolēns, skaits	Zīļu skaits, ko katrs skolēns aizmetas	Zīļu skaits, ko katrs skolēns salasīja	Secinājums
3	$81:3=27$	2	$27+2=29$	Neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.
9	$81:9=9$	8	$9+8=17$	Der.
27	$81:27=3$	26	$3+26=29$	Neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.
81	$81:81=1$	80	$1+80=81$	Neder, jo katrs skolēns atnesa ne vairāk kā 20 zīles.

Tātad katrs no deviņiem skolēniem salasīja 17 zīles.

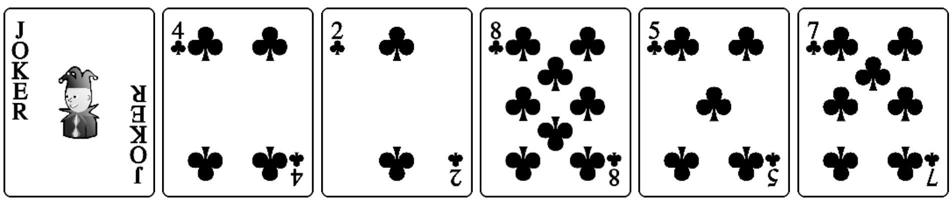
5. Kāršu triks

Trika meistars skatītājam izdala piecas sarkanas kārtis: 2, 3, 4, 5 un 6 (skat., piemēram, 3. att.).



3. att.

Trika meistaram rokās ir sešas melnas kārtis, turklāt tādā secībā, lai to vērtības veidotu skaitli 142857 (pieņemam, ka *JOKER* vērtība ir 1, skat., piemēram, 4. att.).



4. att.

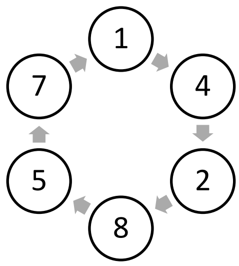
Pēc tam gan skatītājs, gan trika meistars sajauc savu kāršu kaudzīti. (Patiesībā trika meistars tikai liek domāt, ka tas sajauc savu kāršu kaudzīti – viņš izdara tā, lai kārtis paliktu sākotnējā secībā: 1, 4, 2, 8, 5, 7. To var izdarīt, kaudzīti divreiz pārkārtojot: ar kreiso īkšķi kārtis ņemot pa vienai, pirmajā reizē kārtīm būs pretēja secība, otrajā reizē – sākotnējā. Šādā veidā, ātri jaucot kārtis, skatītājam radīsies iespaids, ka kārtis tik tiešām tiek sajauktas.)
Kad tas izdarīts, trika meistars uz galda rindā izliek savas kārtis, veidojot skaitli 142857. Skatītājs izvēlas vienu no savām kārtīm un arī noliek uz galda. Skatītājam viņa izvēlētās sarkanās kārts skaitlis jāsareizina ar triku meistara izveidoto skaitli. Kamēr skatītājs reizina, triku meistars, nesajaucot sešu melno kāršu secību, savāc tās vienā kaudzītē, noteiktā vietā kaudzīti pārdala divās daļās, saliek atpakaļ vienā kaudzītē un noliek uz galda ar skatu uz leju. Kad skatītājs ir ieguvis reizinājumu, trika meistars pēc kārtas no kaudzītes izliek kārtis – tās veido skaitli, kas sakrīt ar skatītāja iegūto reizinājumu. (Piemēram, skatītājs izvēlas skaitli 6, tad viņam tas jāreizina ar triku meistara izlikto skaitli 142857. Reizinājumā iegūst 857142.)
Izskaidro kā un kāpēc šis triks darbojas!

Atrisinājums

Apskatām kādi reizinājumi var rasties, ja 142857 reizina ar kādu no skaitļiem, kas ir skatītāja rokās:

- $142857 \cdot 2 = 285714$;
- $142857 \cdot 3 = 428571$;
- $142857 \cdot 4 = 571428$;
- $142857 \cdot 5 = 714285$;
- $142857 \cdot 6 = 857142$.

Ievērojam, ka visos reizinājumos ir izmantoti tikai tie cipari, kuri ir uz triku meistara kārtīm: 1, 4, 2, 8, 5, 7. Pie tam, ja izvietojam visus ciparus pa apli, nemainot sākotnējo secību (skat. A4. att.), visos reizinājumos ciparu secība nemainās, ņemot par pirmo attiecīgi ciparu 2, 4, 5, 7 vai 8.



A4. att.

Tātad triku meistara galvenais uzdevums ir nesajaukt kāršu secību un pārdalīt kaudzīti divās daļās, atkarībā no cipara, kas ir uz sarkanās kārts:

- ja uz sarkanās kārts ir 2, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 4 un triku meistaram pirmās divas kārtis (cipars 1 un 4) jānovieto kaudzītes apakšā;
- ja uz sarkanās kārts ir 3, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 1 un triku meistaram pirmā kārts (cipars 1) jānovieto kaudzītes apakšā;
- ja uz sarkanās kārts ir 4, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 8 un triku meistaram pirmās četras kārtis jānovieto kaudzītes apakšā jeb pēdējās divas kārtis jānovieto kaudzītes augšā;
- ja uz sarkanās kārts ir 5, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 5 un triku meistaram pirmās piecas kārtis jānovieto kaudzītes apakšā jeb pēdējo kārti jānovieto kaudzītes augšā;
- ja uz sarkanās kārts ir 6, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 2 un triku meistaram pirmās trīs kārtis jānovieto kaudzītes apakšā.