PUNKTIŅŠ Palindromi Komentāri
10.02.2017

Nodarbības mērķis: iepazīties ar interesantām skaitļu īpašībām, aplūkot naturāla skaitļa pierakstu. Daļa no uzdevumiem ir veidota kā atklātie uzdevumi, kur skolēniem jāatrod kādas procesa likumsakarības un jāmēģina tās paskaidrot.

Ar * apzīmēti grūti uzdevumi.

Uzdevumi

1. *Eksperiments:* Izvēlies divciparu skaitli A. B ir otrādi pierakstīts no tiem pašiem cipariem. Aprēķini šo skaitļu starpību C. Izveido skaitlim C otrādu skaitli D un atkal aprēķini starpību. Turpini procesu. Ko tu vari ieraudzīt?

Komentāri. Darbojoties ar tādiem divciparu skaitļiem, kuru cipari dažādi, process ieciklojas. Jāpamana, ka visi šie skaitļi C dalās ar 9. C un skaitlis ar otrādi pierakstītiem cipariem veido skaitļu pārus (9; 90), (18; 81), (27; 72), (36; 63), (45; 54). Formāli uzskatām, ka starpībai 9 otrs skaitlis ir 90. Ievērojot, ka katrā pārī ir skaitļi, kuri dalās ar 9, to starpība arī dalās ar 9, tāpēc iegūtā starpība atkal ir minēto pāru robežās.

2. *Eksperiments:* sareizini 11 x 11; 111 x 111; 11 x 111; 1111 x 1111.

Piezīme. Te veidojas palindromi, kuru pierakstā ir secība 123….321. Te varētu uzdot papildjautājumus: Kādus skaitļus jāreizina, lai iegūtu 123454321? Vai ir vēl kādi līdzīgi skaitļi - palindromi, kuru reizinājums atkal ir palindroms? (piemēram, 1001 x 101 utml.)

3. Atrodi divus secīgus divcipara skaitļus, kuru summa ir palindroms.

Piezīme. Te uzmanība jāvērš uz to, ka summa var būt divciparu skaitlis, vai arī trīsciparu skaitlis. Jāievēro, ka rezultāts būs nepāra skaitlis.

4. *Atrodi 3 secīgus divciparu skaitļus, kuru reizinājums ir palindroms!

Risinājums. Te vispirms jāsaprot, ar kādu ciparu var beigties 3 secīgu skaitļu reizinājums. Ja jāiegūst palindroms, tad skaitlis nebeigsies ar 0. Tāpēc derēs tikai tādi skaitļi, kuri beidzas ar 1, 2, 3, vai 2, 3, 4, vai 6, 7, 8 vai 7, 8, 9. Sareizinot šos trijniekus, pēdējais cipars ir 4 vai 6. Vismazākais reizinājums ir $11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716$, bet lielākais ir $97 \cdot 98 \cdot 99 = 941094$. Tāpēc rezultāts var būt 4, 5 vai 6 ciparu skaitlis. Ievērosim, ka sešciparu palindroms ir formā:

$$\overline{abccba} = a \cdot 100001 + b \cdot 1001 + c \cdot 1100 = 11 \cdot (9091a + 91b + 100c).$$

Redzams, ka šis skaitlis dalās ar 11. Tas nozīmē, ka starp 3 divciparu skaitļiem būs 11, vai 22, 33, 44, 66, 77, 88, 99. Trīs sekojošo skaitļu reizinājumi, kuri satur 11, 22, 33, 44, ir četru vai piecu ciparu skaitļi. Tāpēc atliek pārbaudīt 5 reizinājumus:

$66 \cdot 67 \cdot 68 = 300696$

$76 \cdot 77 \cdot 78 = 456456$

$86 \cdot 87 \cdot 88 = 658416$

$77 \cdot 78 \cdot 79 = 474474$

$87 \cdot 88 \cdot 89 = 681384$

Atbilde ir priekšpēdējais reizinājums.

Piezīme. Uzdevumu, protams, var risināt ar pārlases palīdzību.

5. Drīkst izmantot viencipara skaitļus, aritmētiskās darbības un iekavas. Kādus divcipara palindromus var iegūt, izmantojot 2 vai 3 dotos skaitļus un darbības? Uzraksti arī kā iegūt 3 – ciparu palindromu līdzīgā veidā. Kādu mazāko doto skaitļu skaitu vari lietot?

Piezīme. Uzdevums aritmētisko darbību izpildes trenēšanai.

6. Cik ir 3-ciparu palindromu? Aprēķini visu trīsciparu palindromu summu.

Komentārs. Uzdevums sistemātiskas risināšanas iemaņu veicināšanai. Kādi var būt malējie cipari – viencipara un simtu pozīcijās? Cik kombināciju te ir? Kādu ciparu var likt vidū? Kāda ir aprēķina formula? $(9 \cdot 10 = 90)$

7. Aprēķini visu tādu palindromu ciparu summu, kuri mazāki par 100.

Piezīme. Uzdevums līdzīgs iepriekšējam uzdevumam.

8. Dots divciparu skaitlis A. Skaitlis B satur tos pašus ciparus otrādā secībā. Atrodi tādu A, lai A+ B ir palindroms!

Komentārs. Jāaplūko dažādas iespējas, gadījumu raksturīgās īpašības. Vienkārša atbilde, ja izvēlas divciparu skaitļus, kuri dalās ar 11, piemēram, A = 22, tad arī B ==22 un to summa ir 44. Kas notiek, ja A = 66? Cita grupa ir skaitļi, kuru ciparu summa mazāka par 10. Ar šādu skaitļu summu var iegūt atkal divciparu palindromu. Vai var iegūt 3 ciparu palindromu? (piemēram, 65 + 56). Trīsciparu palindromam jābeidzas ar 1. Derēs visi tie palindromi, kuru ciparu summa ir 11.

9. *Tāds pats uzdevums kā iepriekšējais, bet A ir 3 ciparu skaitlis. A ir 4 ciparu skaitlis.

Komentāri. Pēc analoģijas ar iepriekšējo uzdevumu, pirmkārt, derēs tie skaitļi, kuriem vidējais cipars mazāks par 5, bet malējo ciparu summa mazāka par 10. Derēs arī visi tādi 3 ciparu skaitļi, kur vidējais cipars ir 0. Citi skaitļi, kuru summa būs 4 ciparu skaitļi, nederēs, jo divu viencipara skaitļu summa mazāka par 20, tas ir, veido pārnesumu ne lielāku par 1. Ja vidējais skaitļa A cipars ir $a \neq 0$, tad, saskaitot A un B četrciparu rezultāta desmitu cipars būs summas $2a + 1$ pēdējais cipars. Ievērojot, ka skaitļa A pirmā un pēdējā cipara summai ir jābūt 11, tad A un B summas simtu cipars būs 2 – pāra skaitlis. Tāpēc summas divi vidējie cipari būs dažādi. Līdzīgi spriež par gadījumu, kad A ir 4 ciparu skaitlis.

10. *Eksperiments:* izvēlies divciparu skaitli A, uzraksti tam otrādo skaitli un saskaiti abus. Ja rezultāts nav palindroms, tad veic šo operāciju atkārtoti. Vai izdosies iegūt palindromu pēc vairākiem soļiem?

Piezīme. Vienmēr agrāk vai vēlāk var iegūt palindromu. Īpašs ir skaitlis 196. Tikai 1990. gadā John Walker ar datora palīdzību ieguva palindromu, kurš satur miljons ciparu. Sīkāk skatīt:

http://www.dolbeau.name/dolbeau/p196/p196.html

11. Atrodi tādu vislielāko 4 – ciparu palindromu, kurš dalās ar 15. Kāda ir šī skaitļa ciparu summa?

Atrisinājums. Lietosim dalāmības īpašības. Palindroms dalās ar 5, tāpēc tā pieraksts sākas un beidzas ar 5. Skaitlis dalās ar 3, tāpēc palindroma ciparu summa $10 + 2a$ arī dalās ar 3. Iespējamās a vērtības ir 1, 4, 7. Tāpēc vislielākais skaitlis ir 5775.