Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 2. posma 5.-8. klases uzdevumi un atrisinājumi

5. klase

5.1. Uz autoceļa "Brauc un piesprādzējies" ir trīs braukšanas joslas. Pa pirmo joslu jābrauc ar ātrumu no 50 līdz 70 kilometriem stundā, pa otro joslu – ar ātrumu no 90 līdz 110 kilometriem stundā, bet pa trešo – ar ātrumu no 120 līdz 140 kilometriem stundā.

Autovadītājs brauc pa autoceļa "Brauc un piesprādzējies" vienu noteiktu joslu un ievēro, ka uz odometra (ierīce, kas rāda nobrauktā ceļa garumu kilometros) displeja redzams rādījums

15951

Autovadītājs, ievērojot šo simetrisko skaitli, kas vienādi lasāms gan no labās, gan kreisās puses, nolēma pēc divām stundām atkal aplūkot displeju.

Izrādījās, ka displejā atkal bija redzams simetrisks skaitlis. Pa kuru joslu vai joslām noteikti nebrauca autovadītājs?

Atrisinājums. Apskatām, kādi ir nākamie simetriskie skaitļi, ko var redzēt odometra displejā.

- Pēc skaitļa 15951 var redzēt skaitli 16061. Šajā gadījumā autovadītājs divās stundās ir nobraucis $16061 - 15951 = 110$ km, tas ir iespējams, ja brauc pa pirmo joslu, piemēram, ar ātrumu 55 km/h.
- Pēc skaitļa 16061 var redzēt skaitli 16161. Šajā gadījumā autovadītājs divās stundās ir nobraucis $16161 - 15951 = 210$ km, tas ir iespējams, ja brauc pa otro joslu, piemēram, ar ātrumu 105 km/h.
- Pēc skaitļa 16161 var redzēt skaitli 16261. Šajā gadījumā autovadītājs divās stundās būtu nobraucis $16261 - 15951 = 310$ km. Pat braucot ar vislielāko atļauto ātrumu 140 km/h divās stundās var nobraukt tikai $140 \cdot 2 = 280$ km, kas ir mazāk nekā 310 km.

Ja autovadītājs brauktu pa trešo joslu ar mazāko iespējamo ātrumu 120 km/h, tad divās stundās viņš nobrauktu 240 km, bet $15951 + 240 = 16191$, kas ir vairāk nekā 16161. Tātad autovadītājs noteikti nebrauca pa trešo joslu.

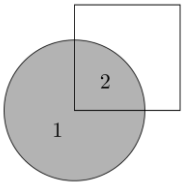
5.2. Skaitlim 2016201620172017 izsvītroja vienu vai vairākus ciparus tā, ka iegūtais skaitlis dalās ar 3. Kādu lielāko skaitli varēja iegūt?

Atrisinājums. Lielākais skaitlis, kādu var iegūt, ir 201620162017017. Pamatosim, ka lielāku skaitli nevar iegūt. Lai iegūtu lielāko skaitli, jāizsvītro pēc iespējas mazāk cipari. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Dotā skaitļa ciparu summa ir 38. Vienīgā iespēja izsvītrot vienu ciparu, lai iegūtā skaitļa ciparu summa un tātad arī pats skaitlis dalītos ar 3, ir izsvītrot ciparu 2. No četriem skaitļiem, ko var iegūt, izsvītrojot divnieku (16201620172017, 201601620172017, 201620160172017, 201620162017017), lielākais ir 201620162017017.

5.3. Krokodils, lauva, tīģeris un gepards iztiku sev sagādā, medījot antilopes. Katrs no tiem vienā dienā var nomedīt vienu antilopi, ar to, neskaitot medību dienu, krokodilam pietiek vēl vienai dienai, lauvam – vēl divām dienām, tīģerim – vēl trim dienām, bet gepardam – vēl četrām dienām. Katrs no tiem nākamajā dienā pēc tam, kad ir apēdis savu antilopi, atkal dodas medībās. Zināms, ka 2017. gada 17. februārī tie visi bija devušies medībās. Kurš būs nākamais tuvākais datums, kad tie visi reizē atkal dosies medībās?

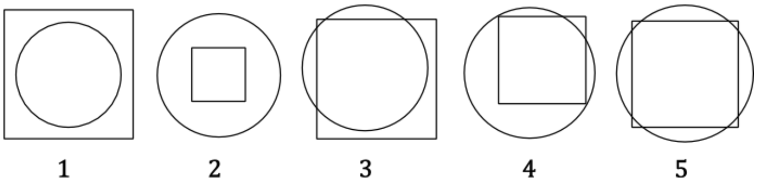
Atrisinājums. Skaidrs, ka krokodils dodas medībās katru otro dienu, lauva – katru trešo, tīģeris – katru ceturto, bet gepards – katru piekto dienu. Pēc n dienām krokodils dosies medībās, ja n dalīsies ar 2, lauva – ja n dalīsies ar 3, tīģeris – ja n dalīsies ar 4, un gepards – ja n dalīsies ar 5. Tātad, ja tie visi kopā atkal dosies medībās pēc n dienām, tad n jādalās gan ar 2, gan ar 3, gan ar 4, gan ar 5. Mazākais šāds n ir šo četru skaitļu mazākais kopīgais dalāmais, kas ir 60. Tātad visi reizē atkal dosies medībās pēc 60 dienām, tas ir, 2017. gada 18. aprīlī.

5.4. Zane uz papīra lapas uzzīmēja riņķa līniju un kvadrātu (tā, ka neviens no tiem nepieskaras lapas malai), izkrāsoja riņķi pelēku un tad sagrieza lapu pa to kontūriem. Cik pelēkas daļas viņa šādi varēja iegūt? Atrodi visus variantus, nav jāpamato, ka citu nav! Vienu piemēru, kā var iegūt 2 pelēkas daļas, skat. 1. att.



1. att.

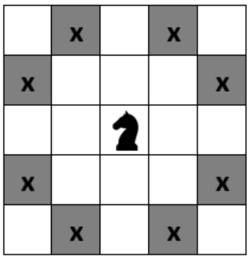
Atrisinājums. Var iegūt 1, 2, 3, 4 vai 5 pelēkas daļas, skat., piemēram, 2. att.



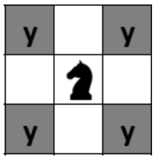
2. att.

5.5. Šaha zirdziņš ir sasitis kāju, tāpēc viņš veic vienu garu lēcienu (tas ir, no tās rūtiņas, kurā stāv zirdziņš, viņš var aizlēkt uz jebkuru rūtiņu, kas atzīmēta ar "x", skat. 3. att.) un vienu īsu lēcienu (tas ir, no tās rūtiņas, kurā stāv zirdziņš, viņš var aizlēkt uz jebkuru rūtiņu, kas atzīmēta ar "y", skat. 4. att.). Parādi, kā klibais zirdziņš var apstaigāt šaha galdiņu ar izmēriem 4×4 lauciņi, pamīšus izpildot vienu garu lēcienu, vienu īsu lēcienu, vienu garu lēcienu, vienu īsu lēcienu, …. !

Piezīme. Apstaigāt galdiņu nozīmē, ka zirdziņš katrā šaha galdiņa lauciņā ir bijis tieši vienu reizi.

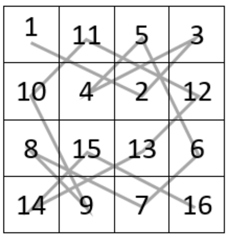


3. att.



4. att.

Atrisinājums. Šaha galdiņu ar izmēriem 4×4 lauciņus var apstaigāt, piemēram, kā parādīts 5. att.



5. att.

6. klase

6.1. Veikalā "*Kartupelis un apelsīns*" ir jauns norēķinu veids, lietojot kases aparātu "Runā un maksā". Pircējs mikrofonā pasaka, ko un cik daudz vēlas iegādāties, un tad kases aparāts izdrukā čeku, kuru ir jāapmaksā. Pircējs saka: "Vēlos samaksāt par 1 kg apelsīnu (cena 0,90 €/kg), 2 kg banānu (cena 0,60 €/kg) un trīs vienādiem dzērveņu želejkonfekšu iepakojumiem, kuru cenu neatceros.

Kases aparāts izdrukā čeku par € 5,30.

Pircējs nav ar mieru un lūdz pārrēķināt. Tik tiešām – jaunajā čekā ir cita summa. Kā var noteikti zināt, ka pirmais čeks bija kļūdains?

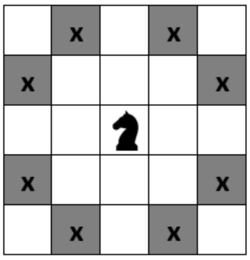
Atrisinājums. Par 1 kg apelsīnu un 2 kg banānu pircējam kopā jāmaksā $1 \cdot 0{,}90 + 2 \cdot 0{,}60 = 2{,}10$ eiro. Līdz ar to par 3 vienādiem dzērveņu želejkonfekšu iepakojumiem būtu jāmaksā $5{,}30 - 2{,}10 = 3{,}20$ eiro jeb 320 centi. Tā kā 320 nedalās ar 3, tad pirmais čeks noteikti bija kļūdains.

6.2. Skaitlim 201720182019 izsvītroja vienu vai vairākus ciparus tā, ka iegūtais skaitlis dalās ar 9. Kādu lielāko skaitli varēja iegūt?

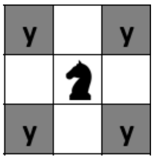
Atrisinājums. Lielākais skaitlis, kādu var iegūt, ir 2012012019. Pamatosim, ka lielāku skaitli nevar iegūt. Lai iegūtu lielāko skaitli, jāizsvītro pēc iespējas mazāk cipari. Lai skaitlis dalītos ar 9, tā ciparu summai jādalās ar 9. Dotā skaitļa ciparu summa ir 33. Nav iespējams izsvītrot vienu ciparu, lai iegūtā skaitļa ciparu summa dalītos ar 9. Vienīgā iespēja izsvītrot divus ciparus, lai iegūtā skaitļa ciparu summa un tātad arī pats skaitlis dalītos ar 9, ir izsvītrot ciparus 7 un 8.

6.3. Šaha zirdziņš ir sasitis kāju, tāpēc viņš veic vienu garu lēcienu (tas ir, no tās rūtiņas, kurā stāv zirdziņš, viņš var aizlēkt uz jebkuru rūtiņu, kas atzīmēta ar "x", skat. 6. att.) un vienu īsu lēcienu (tas ir, no tās rūtiņas, kurā stāv zirdziņš, viņš var aizlēkt uz jebkuru rūtiņu, kas atzīmēta ar "y", skat. 7. att.). Vai zirdziņš var apstaigāt 8. att. doto figūru, pamīšus izpildot vienu garu lēcienu, vienu īsu lēcienu, vienu garu lēcienu, vienu īsu lēcienu, …. ?

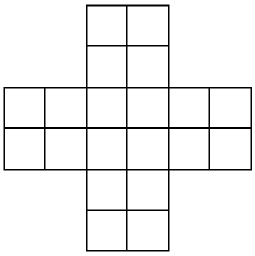
Piezīme. Apstaigāt figūru nozīmē, ka zirdziņš katrā figūras rūtiņā ir bijis tieši vienu reizi.



6. att.

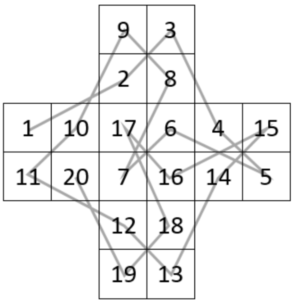


7. att.



8. att.

Atrisinājums. Jā, zirdziņš var apstaigāt uzdevumā doto figūru, skat., piemēram, 9. att.



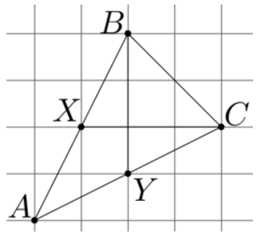
9. att.

6.4. Uz rūtiņu lapas uzzīmē tādu trijstūri ABC, lai vienlaicīgi izpildītos šādi nosacījumi:

- visas trijstūra virsotnes atrodas rūtiņu krustpunktos;
- punkts X ir nogriežņa AB viduspunkts;
- punkts Y ir nogriežņa AC viduspunkts;
- nogriežņi BY un CX krustojoties veido 90° lielu leņķi.

Piezīme. Nogriežņa viduspunkts ir tāds punkts, kas sadala nogriezni divos vienāda garuma nogriežņos.

Atrisinājums. Kā uzzīmēt trijstūri skat., piemēram, 10. att.



10. att.

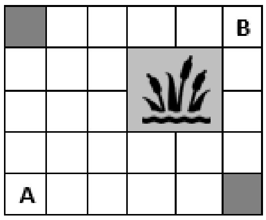
6.5. Parkā aug liepas un ozoli. No visiem kokiem liepas ir 25%, bet ozoli – 75%. Pavasara talkas pirmajā dienā skolēni parkā stādīja tikai liepas, kā rezultātā dienas beigās ozolu īpatsvars parkā nokritās līdz 15%. Talkas otrajā dienā skolēni parkā stādīja tikai ozolus, kā rezultātā dienas beigās parkā izveidojās tāda pati koku proporcija (25% liepu un 75% ozolu), kāda bija pirms talkas. Cik reizes parkā pieauga ozolu skaits pēc talkas beigām, salīdzinot ar situāciju pirms tās?

Atrisinājums. Koku skaitu pirms talkas apzīmējam ar x, tad liepu skaits ir $\frac{1}{4}x$ un ozolu skaits ir $\frac{3}{4}x$. Pēc pirmās talkas dienas ozolu īpatsvars samazinājās piecas reizes un tā kā tika stādītas tikai liepas, tad koku kopskaits palielinājās piecas reizes, tas ir, pēc pirmās talkas dienas visu koku skaits bija $5x$). Tātad pirmajā talkas dienā tika iestādītas $5x - x = 4x$ liepas un kopējais liepu skaits pēc talkas bija $\frac{1}{4}x + 4x = 4\frac{1}{4}x = \frac{17}{4}x$.

Pēc otrās talkas dienas ozolu skaits atkal ir trīs reizes lielāks nekā liepu skaits, tātad ozolu skaits ir $\frac{17}{4}x \cdot 3 = \frac{51}{4}x$. Tātad ozolu skaits parkā pēc talkas beigām ir pieaudzis $\frac{51}{4}x : \frac{3}{4}x = \frac{51\cdot4}{4\cdot3} = 17$ reizes.

7. klase

7.1. *Varde* vienā lēcienā var pārvietoties vienu rūtiņu uz augšu vai vienu rūtiņu pa labi. Cik dažādos veidos *varde* no rūtiņas A var nokļūt rūtiņā B (skat. 11. att.)? Iekrāsotajās rūtiņās ir šķērslis, tajās *varde* neiet.



11. att.

Atrisinājums. Pakāpeniski aprēķinām, cik veidos *varde* var nokļūt katrā rūtiņā. Ievērojam, ka rūtiņā X (skat. 12. att.) *varde* var nokļūt no rūtiņas C vai D. Ja rūtiņā C *varde* var nokļūt c veidos, bet rūtiņā D tā var nokļūt d veidos, tad rūtiņā X *varde* var nokļūt $c + d$ veidos. Tātad no rūtiņas A rūtiņā B *varde* var nokļūt 19 dažādos veidos (skat. 13. att.).

C	X
	D

12. att.

	4	14	14	14	19
1	4	10			5
1	3	6			5
1	2	3	4	5	5
A	1	1	1	1	

13. att.

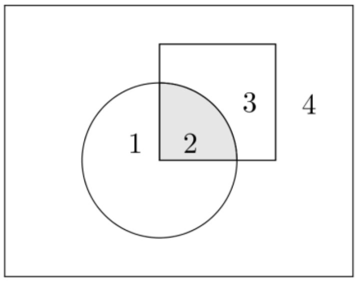
7.2. Piecciparu skaitļa, kas dalās ar 13, pirmais cipars ir vienāds ar ceturto, bet otrais – ar piekto. Kāds ir šī skaitļa trešais cipars? Atrodi visas iespējamās vērtības un pamato, ka citu nav!

Atrisinājums. Doto piecciparu skaitli varam uzrakstīt kā $\overline{abcab}$. Pārveidojam šo skaitli

$$\overline{abcab} = \overline{ab} \cdot 1000 + c \cdot 100 + \overline{ab} = 1001 \cdot \overline{ab} + 100c.$$

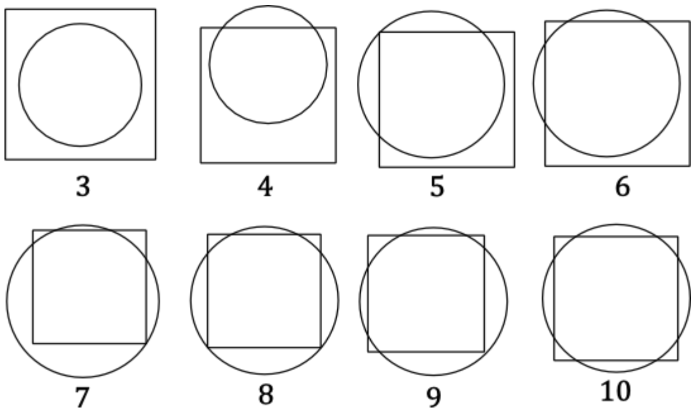
Tā kā 1001 dalās ar 13 ($1001 : 13 = 77$), tad, lai viss skaitlis dalītos ar 13, arī saskaitāmajam $100c$ jādalās ar 13. Tā kā 100 un 13 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad c jādalās ar 13, tas iespējams tikai tad, kad $c = 0$.

7.3. Zane uz papīra lapas uzzīmēja riņķa līniju un kvadrātu (tā, ka neviens no tiem nepieskaras lapas malai) un tad sagrieza lapu pa to kontūriem. Cik daļās var būt sagriezta lapa? Atrodi visus variantus, nav jāpamato, ka citu nav! Vienu piemēru, kā lapa var būt sagriezta 4 daļās, skat. 14. att.



14. att.

Atrisinājums. Lapa var būt sagriezta 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 daļās, skat., piemēram, 15. att.



15. att.

7.4. Trijstūrī ABC $(AB < BC)$ novilkta bisektrise BD. Uz BD izvēlēts tāds punkts F, ka $\sphericalangle AFD = \sphericalangle ADF$, un uz BC izvēlēts tāds punkts E, ka $FE||AC$. Pierādīt, ka $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BEF$!

Atrisinājums. Apzīmējam $\sphericalangle ABF = \sphericalangle EBF = \beta$ un $\sphericalangle AFD = \sphericalangle ADF = \alpha$ un aprēķināsim $\sphericalangle BAF$ un $\sphericalangle BEF$. Ievērojam, ka $\sphericalangle AFB = 180° - \sphericalangle AFD = 180° - \alpha$ (blakusleņķu summa ir 180°), tad no trijstūra BAF iegūstam, ka $\sphericalangle BAF = 180° - \sphericalangle ABF - \sphericalangle AFB = 180° - \beta - (180° - \alpha) = \alpha - \beta$ (trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180°).

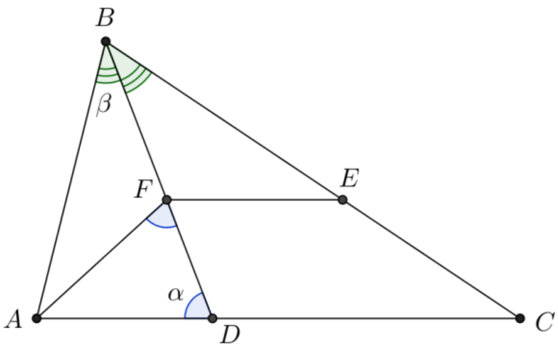
Līdzīgi iegūstam $\sphericalangle BDC = 180° - \sphericalangle ADF = 180° - \alpha$ un

$$\sphericalangle DCB = 180° - \sphericalangle BDC - \sphericalangle DBC = 180° - (180° - \alpha) - \beta = \alpha - \beta$$

Tā kā $\sphericalangle BEF = \sphericalangle DCB$ (kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm), tāpēc arī $\sphericalangle BEF = \alpha - \beta$.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BEF = \alpha - \beta$.

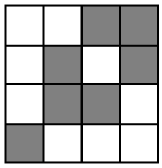
Piezīme. Prasīto var iegūt arī, pierādot, ka $\Delta ABF = \Delta EBF$ pēc pazīmes $\ell m \ell$.



16. att.

7.5. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso 4×4 rūtiņu kvadrātā, lai neatkarīgi no tā, kuras divas rūtiņu rindas un divas rūtiņu kolonnas tiktu izmestas, vismaz viena iekrāsotā rūtiņa paliktu neizmesta?

Atrisinājums. Mazākais skaits rūtiņu, kas jāiekrāso, ir 7. Tās var iekrāsot, piemēram, kā parādīts 17. att. Redzams, ka, izmetot jebkuras divas rindas, aizkrāsotas paliek vēl rūtiņas trīs dažādās kolonnās, tātad ar 2 kolonnu izmešanu visas atlikušās iekrāsotās rūtiņas izmest nevar.



17. att.

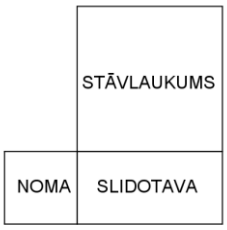
Pierādīsim, ka mazāk rūtiņu nevar iekrāsot, tas ir, ka sešas iekrāsotas rūtiņas vienmēr var izmest, izmetot divas rindas un divas kolonnas.

Ja kādā rindā ir 3 vai vairāk iekrāsotas rūtiņas, tad, izvēloties šo rindu, atliek vēl 3 vai mazāk rūtiņas, ko viegli izmest ar 3 gājieniem.

Ja nav tādas rindas, kurā ir 3 vai vairāk iekrāsotas rūtiņas, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir rinda, kurā ir 2 iekrāsotas rūtiņas, izmetot to, paliek 3 rindas un 4 iekrāsotas rūtiņas, tātad atkal pēc Dirihlē principa ir vēl viena rinda, kurā ir 2 iekrāsotas rūtiņas. Izmetot arī to, atliek 2 iekrāsotas rūtiņas, kuras var izmest, izmetot divas kolonnas.

8. klase

8.1. Slidotavai "Pa plānu ledu" ir taisnstūrveida forma un tās perimetrs ir 120 metri. Pie slidotavas vienas malas atrodas kvadrātveida laukums, kurā uzbūvēta slidu noma, bet pie blakus malas atrodas kvadrātveida stāvlaukums (skat. 18. att.). Stāvlaukuma platība ir par 1200 m^2 lielāka nekā slidu nomas platība. Aprēķini slidotavas platību!



18. att.

Atrisinājums. Slidu nomas malas garumu apzīmējam ar x, tad stāvlaukuma malas garums ir $60 - x$. Slidu nomas platība ir x^2 un stāvlaukuma platība ir $(60 - x)^2$. Līdz ar to iegūstam vienādojumu

$$(60 - x)^2 - x^2 = 1200;$$
$$3600 - 120x + x^2 - x^2 = 1200;$$
$$120x = 2400;$$
$$x = 20.$$

Tātad slidotavas platība ir $x \cdot (60 - x) = 20 \cdot 40 = 800 \text{ m}^2$.

8.2. Ja no piecciparu skaitļa, kam pirmais cipars vienāds ar ceturto, bet otrais – ar piekto, atņem vieninieku tad iegūtais skaitlis dalās ar 11. Kāds var būt sākotnējā piecciparu skaitļa trešais cipars? Atrodi visus iespējamos variantus un pamato, ka citu nav!

Atrisinājums. Doto piecciparu skaitli varam uzrakstīt kā $\overline{abcab}$. Pārveidojam šo skaitli

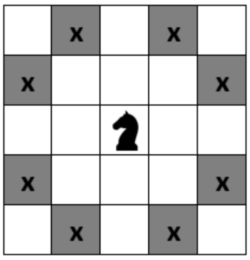
$$\overline{abcab} - 1 = \overline{ab} \cdot 1000 + c \cdot 100 + \overline{ab} - 1 = \overline{ab} \cdot 1001 + 100c - 1 = \overline{ab} \cdot 1001 + 99c + c - 1.$$

Tā kā 1001 dalās ar 11 ($1001 : 11 = 91$) un 99 dalās ar 11, tad, lai viss skaitlis dalītos ar 11, arī $c - 1$ jādalās ar 11. Tas iespējams tikai tad, ja $c = 1$.

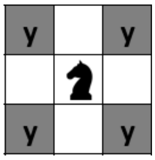
8.3. a) Parādi, kā šaha zirdziņš var apstaigāt šaha galdiņu ar izmēriem 5×5 lauciņi! Vienā lēcienā no tās rūtiņas, kurā stāv zirdziņš, tas var aizlēkt uz jebkuru rūtiņu, kas atzīmēta ar "x", skat. 19. att.

b) Šaha zirdziņš ir sasitis kāju, tāpēc tas veic vienu garu lēcienu (skat. 19. att.) un vienu īsu lēcienu (no tās rūtiņas, kurā stāv zirdziņš, tas var aizlēkt uz jebkuru rūtiņu, kas atzīmēta ar "y", skat. 20. att.). Vai klibais zirdziņš var apstaigāt šaha galdiņu izmēriem 5×5 lauciņi, pamīšus izpildot vienu garu lēcienu, vienu īsu lēcienu, vienu garu lēcienu, vienu īsu lēcienu, ….?

Piezīme. Apstaigāt galdiņu nozīmē, ka zirdziņš katrā šaha galdiņa lauciņā ir bijis tieši vienu reizi.



19. att.



20. att.

Atrisinājums. a) Šaha zirdziņš galdiņu var apstaigāt tā, kā parādīts, piemēram, 21. att.

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	25	4	21
18	23	6	11	16
7	12	17	22	5

21. att.

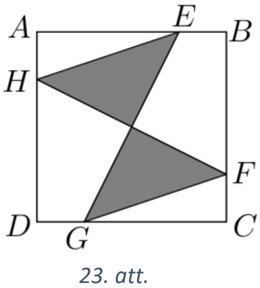
x		x		x
	o		o	
x		x		x
	o		o	
x		x		x

22. att.

b) Pierādīsim, ka klibais zirdziņš nevar apstaigāt šaha galdiņu ar izmēriem 5×5 lauciņi.

Pieņemsim pretējo, ka zirdziņam šādā veidā ir izdevies apstaigāt laukumu. Aplūkosim tikai zirdziņa īsos gājienus, savienosim ar līniju katrus divus lauciņu centrus, starp kuriem zirdziņš veic īso gājienu. Starta lauciņš (no kura zirdziņš sāk) šajā gadījumā paliek nesavienots, pārējie 24 lauciņi ir pa pāriem savienoti. Aplūkosim ar "x" atzīmētos lauciņus (skat. 22. att.), tādi ir 9, tātad vismaz 8 no tiem būs savienoti ar līniju ar kādu citu lauciņu, bet līnija (īsais gājiens) no tiem var iet tikai uz ar "o" apzīmēto lauciņu, kādi ir tikai 4. Tātad kāds no ar "o" apzīmētajiem lauciņiem būs savienots ar līniju ar vairāk nekā vienu lauciņu – pretruna.

8.4. Uz kvadrāta $ABCD$ malām atzīmēti punkti E, F, G un H tā, ka $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CG}{GD} = \frac{DH}{AH} = 9$. Aprēķināt iekrāsotās daļas (skat. 23. att.) laukuma attiecību pret $ABCD$ laukumu!



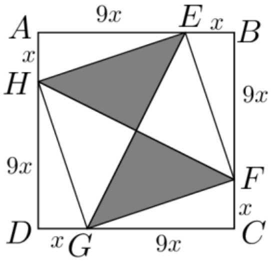
23. att.

Atrisinājums. Apzīmējam $EB = x$, tad $EB = CF = DG = AH = x$ un $AE = BF = CG = DH = 9x$ (skat. 24. att.). Kvadrāta $ABCD$ malas garums ir $10x$ un $S(ABCD) = 100x^2$.

Tā kā trijstūri HAE, EBF, FCG un GDH ir vienādi pēc pazīmes $m\ell m$, tad $HE = EF = FG = GH$. Tā kā $\sphericalangle HEF = 180° - (\sphericalangle AEH + \sphericalangle BEF) = 180° - (\sphericalangle AEH + \sphericalangle AHE) = 180° - 90° = 90°$, tad četrstūris $EFGH$ ir kvadrāts, kura laukums ir

$$S(EFGH) = S(ABCD) - 4 \cdot S(HAE) = 100x^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 9x = 82x^2$$

Iekrāsotās daļas laukums ir puse no kvadrāta $EFGH$ laukuma, tātad tas ir $41x^2$. Tātad iekrāsotās daļas laukuma attiecība pret kvadrāta $ABCD$ laukumu ir $\frac{41x^2}{100x^2} = \frac{41}{100}$.



24. att.

8.5. Divi septītās klases skolēni un vairāki astotās klases skolēni piedalījās skolas šaha turnīrā. Turnīrā katrs dalībnieks ar katru izspēlēja vienu partiju. Katrā partijā par uzvaru dalībniekam tika piešķirts viens punkts, par neizšķirtu katrs dalībnieks saņēma 0,5 punktus, bet par zaudējumu punkti netika piešķirti. Turnīra beigās septītās klases skolēni kopā bija ieguvuši 8 punktus, bet visi astotās klases skolēni bija ieguvuši vienādu punktu skaitu. Cik astotās klases skolēni piedalījās turnīrā? Atrodi visus iespējamos variantus un pamato, ka citu nav!

Atrisinājums. Ar n apzīmējam astotās klases skolēnu skaitu, kas piedalījās turnīrā un ar x – punktu skaitu, ko ieguva katrs astotās klases skolēns. Tātad turnīrā kopā piedalījās $n+2$ skolēni un tā kā katrs dalībnieks ar katru izspēlēja vienu partiju, tad kopējais spēļu un arī punktu skaits ir $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Astotās klases skolēni kopā ieguva

$$nx = \frac{(n+2)(n+1)}{2} - 8$$

punktus. Reizinot abas vienādojuma puses ar 2, iegūstam

$$2nx = (n+2)(n+1) - 16;$$
$$2nx = n^2 + 3n - 14.$$

Dalot abas vienādojuma puses ar n, iegūstam

$$2x = \frac{n^2}{n} + \frac{3n}{n} - \frac{14}{n};$$
$$2x = n + 3 - \frac{14}{n}$$

Tā kā $2x$ ir vesels skaitlis, tad n ir jābūt skaitļa 14 dalītājam, tas ir, n iespējamās vērtības ir 1; 2; 7; 14. Apskatām visus gadījumus.

- Ja $n = 1$, tad $2x = 1 + 3 - 14 = -10$, kas nav iespējams, jo punktu skaits nevar būt negatīvs.
- Ja $n = 2$, tad $2x = 2 + 3 - 7 = -2$, kas nav iespējams, jo punktu skaits nevar būt negatīvs.
- Ja $n = 7$, tad $2x = 7 + 3 - 2 = 8$ jeb $x = 4$.
- Ja $n = 14$, tad $2x = 14 + 3 - 1 = 16$ jeb $x = 8$.

Tātad turnīrā piedalījās 7 vai 14 astotās klases skolēni. Parādīsim, ka abi šie gadījumi ir iespējami.

- Ja turnīrā piedalījās 7 astotās klases skolēni, tad turnīrā kopā piedalījās 9 skolēni un katrs izspēlēja 8 spēles. Piemēram, ja visas spēles beidzās neizšķirti, tad katrs turnīra dalībnieks izcīnīja 4 punktus, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.
- Ja turnīrā piedalījās 14 astotās klases skolēni, tad doto turnīra rezultātu varēja panākt, piemēram, sekojošā veidā, kur ar A un B apzīmēti 7. klases skolēni:
    - spēle starp A un B beidzās neizšķirti;
    - visas spēles starp 8. klases skolēniem beidzās neizšķirti;
    - septiņi 8. klases skolēni uzvarēja A, bet spēlēja neizšķirti ar B;
    - otri septiņi 8. klases skolēni uzvarēja B, bet spēlēja neizšķirti ar A.

  Šajā gadījumā abiem 7. klases skolēniem ir 4 punkti (8 neizšķirti), bet visiem 8. klases skolēniem ir 8 punkti (14 neizšķirti un viena uzvara).