

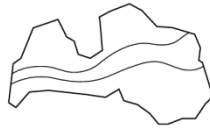
I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Koka sija sver 90 kg, bet par 2 m garāka dzelzs sija sver 160 kg, pie tam viens metrs dzelzs sijas sver par 5 kilogramiem vairāk nekā viens metrs koka sijas. Cik sver viens metrs katras sijas?
2. Pierādīt, ka $9x^6 - x^3 + 1 > 0$ visiem reāliem x .
3. Trapeces $ABCD$ pamatu attiecība $BC:AD = 3:5$. Uz sānu malas CD atlikts punkts E tā, ka nogrieznis AE dala trapeces laukumu uz pusēm. Kādā attiecībā punkts E sadala sānu malu CD ?
4. Naturālu skaitli sauksim par *pārdabisku*, ja, tā ciparus uzrakstot pretējā secībā, iegūst skaitli, kas ir lielāks nekā sākotnējais skaitlis, un iegūtais skaitlis dalās ar sākotnējo skaitli. Mazākais *pārdabiskais* skaitlis ir 1089, jo $9801 : 1089 = 9$. Atrast vēl divus citus *pārdabiskus* skaitļus!
5. a) Pierādīt, ka starp 1010 dažādiem naturāliem skaitļiem, no kuriem neviens nepārsniedz 2017, vienmēr iespējams izvēlēties trīs skaitļus tā, ka divu izvēlēto skaitļu summa ir vienāda ar trešo skaitli!
b) Vai šāda īpašība ir spēkā arī 1009 dažādiem naturāliem skaitļiem, kas nepārsniedz 2017?



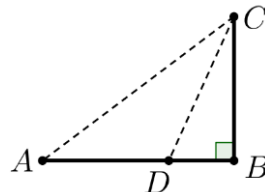
I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Punkti A un B ir 16 km attālumā viens no otra, bet B un C – 12 km attālumā. Šoseja $A - B - C$ punktā B izveido taisnu leņķi (skat. 1. att.). Ceļinieka ātrums pa šoseju ir v km/h, bet pa lauku ceļu ātrums ir c km/h. Ja ceļinieks dodas no A uz C pa šoseju (maršruts $A \rightarrow B \rightarrow C$), tad viņš nonāk galapunktā par 20 min ātrāk nekā ejot no A uz C pa lauku ceļu (maršruts $A \rightarrow C$). Ja turpretī viņš iet 11 km pa šoseju no A uz D un pēc tam uz C pa lauku ceļu (maršruts $A \rightarrow D \rightarrow C$), tad viņš ceļā pavada 5 stundas un 5 minūtes. Aprēķināt v un c !



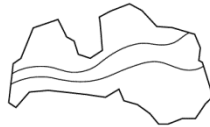
1. att.

2. Pierādīt, ka $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 > 0$, ja x, y – reāli skaitļi!
3. Kvadrāta $ABCD$ diagonāles krustojas punktā O , punkts E ir nogriežņa AO viduspunkts. Taisne BE krusto malu AD punktā F , bet taisne FO krusto malu BC punktā G . Pierādīt, ka trijstūris BFG ir vienādsānu!
4. Dots taisnstūris ar izmēriem 7×5 rūtiņas. Griežot pa rūtiņu līnijām, tas sagriezts septiņās vienlielās daļās (katras daļas laukums ir 5 rūtiņas). Noteikt, kāds ir mazākais iespējamais griezuma līniju kopgarums, pieņemot, ka rūtiņas malas garums ir viena vienība!
5. Desmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizvietojo ar vienādiem burtiem, bet dažādus – ar dažādiem, ieguva vārdu *MATEMĀTIKA* (īsais "A" un garais "Ā" aizstāj atšķirīgus ciparus). Papildus zināms, ka skaitlis $\overline{M\bar{A}}$ dalās ar 2, $\overline{M\bar{A}\bar{T}}$ – ar 3, $\overline{M\bar{A}\bar{T}\bar{E}}$ – ar 4, $\overline{M\bar{A}\bar{T}\bar{E}\bar{M}}$ – ar 5, $\overline{M\bar{A}\bar{T}\bar{E}\bar{M}\bar{A}}$ – ar 6, $\overline{M\bar{A}\bar{T}\bar{E}\bar{M}\bar{A}\bar{T}}$ – ar 7, $\overline{M\bar{A}\bar{T}\bar{E}\bar{M}\bar{A}\bar{T}\bar{I}}$ – ar 8, $\overline{M\bar{A}\bar{T}\bar{E}\bar{M}\bar{A}\bar{T}\bar{I}\bar{K}}$ – ar 9, $\overline{M\bar{A}\bar{T}\bar{E}\bar{M}\bar{A}\bar{T}\bar{I}\bar{K}\bar{A}}$ – ar 10. Noteikt, kāds bija sākotnējais desmitciparu skaitlis!



Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais
fonds

I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

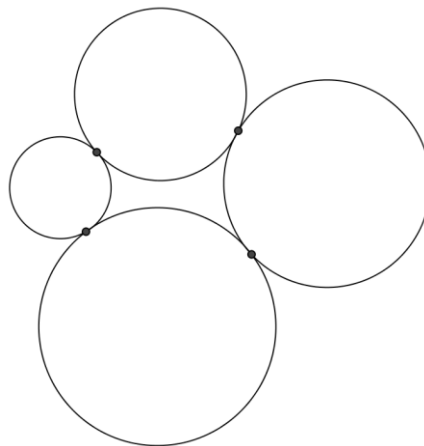
1. Zināms, ka skaitļu a_1 ; a_2 ; a_3 summa ir 105 un tie veido aritmētisko progresiju, bet skaitļi a_1 ; a_2 ; $a_3 + 4$ veido ģeometrisku progresiju. Atrast visas iespējamās a_1 ; a_2 ; a_3 vērtības un pamatot, ka citu nav!

2. Pierādīt, ka $x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 \geq 6x^2y^2$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi!

3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x + z = 2017 \\ 31xz = y^2 \end{cases}$$

4. Četras riņķa līnijas ārēji pieskaras tā, kā parādīts 2. att. Pierādīt, ka četrstūrī, ko veido riņķa līniju pieskaršanās punkti, var apvilkt riņķa līniju!



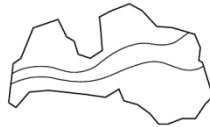
2. att.

5. Antra un Baiba spēlē spēli uz 3×3 rūtiņu laukuma. Spēlētājas gājienus izdara pēc kārtas, katrā gājienu kādā no tukšajām rūtiņām ierakstot vai nu nullīti, vai krustiņu (katra spēlētāja katrā gājienu var rakstīt jebkuru no šiem simboliem). Kad viss laukums aizpildīts, tiek saskaitīts spēles rezultāts. Par katru rindu, kolonnu un diagonāli (tādu, kas satur 3 rūtiņas), ja tajā ir pāra skaits krustiņu, punktu saņem Antra, bet, ja krustiņu skaits ir nepāra, tad punktu saņem Baiba. Uzvar spēlētāja, kuras punktu kopsumma ir lielāka. Pierādīt, ka spēlētājam, kura sāk spēli, ir uzvaroša stratēģija, un aprakstīt to!



Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS
ATTĪSTĪBAS
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais
fonds

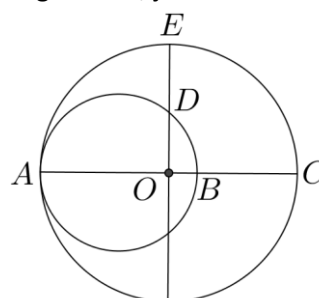
I E G U L D Ī J U M S T A V Ā N Ā K O T N Ē

Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Jebkuriem diviem pozitīviem skaitļiem x un y piekārtots trešais skaitlis $x^{\lg y}$, ko apzīmēsim ar $x * y$. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem x, y un z izpildās $(x * y) * z = x * (y * z)$.
2. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + 4 \geq 2x - 2y - xy$, ja x, y – reāli skaitļi!
3. Naturālu skaitli saucim par *pārdabisku*, ja, tā ciparus uzrakstot pretējā secībā, iegūst skaitli, kas ir lielāks nekā sākotnējais skaitlis, un iegūtais skaitlis dalās ar sākotnējo skaitli. Mazākais *pārdabiskais* skaitlis ir 1089, jo $9801 : 1089 = 9$. **a)** Atrast vēl divus citus *pārdabiskus* skaitļus! **b)** Pierādīt, ka *pārdabisku* skaitļu ir bezgalīgi daudz!
4. Divas dažādas riņķa līnijas iekšēji pieskaras punktā A . Lielākās riņķa līnijas centrs ir O un taisne OA krusto mazāko riņķa līniju punktā B , bet lielāko – punktā C . Lielākās riņķa līnijas diametrs, kas ir perpendikulārs OA , krusto mazāko riņķa līniju punktā D , bet lielāko – punktā E (punkts D atrodas starp O un E , skat. 3. att.). Aprēķināt abu riņķa līniju rādiusu garumus, ja $DE = 5$ un $BC = 7$.



3. att.

5. Kādu lielāko skaitu 5×13 rūtiņu taisnstūru var izgriezt no rūtiņu lapas, kuras izmēri ir **a)** 41×65 ; **b)** 47×65 rūtiņas?