„Profesora Cipariņa kluba” 2016./2017. mācību gada

3. nodarbība. **Uzdevumu īsi atrisinājumi.**

1. Trīs sivēntiņi

Trīs sivēntiņi – Nif-nifs, Naf-nafs un Nuf-nufs – spēlē bumbu. Spēles mērķis ir ar bumbu trāpīt pārējiem sivēntiņiem. To viņi dara, izdarot metienus pēc kārtas – sākumā met Nif-nifs, tad Naf-nafs un visbeidzot – Nuf-nufs. Kad kādam no sivēntiņiem trāpa ar bumbu, viņš vairāk spēli neturpina. Nif-nifs 30% gadījumu trāpa tur, kur ir mērķējis, Naf-nafs – pusē gadījumu, bet Nuf-nufs vienmēr trāpa mērķī. Kā jārīkojas Nif-nifam, lai viņam būtu vislielākās izredzes uzvarēt?

<u>Atrisinājums</u>

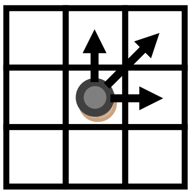
Nif-nifam pirmais metiens ir speciāli jāmet garām.

- Ja Nif-nifs mestu pa Naf-nafu un trāpītu, tad nākamais bumbu mestu Nuf-nufs, un viņš noteikti izsistu Nif-nifu, tātad Nif-nifs noteikti zaudētu.
- Ja Nif-nifs mestu pa Nuf-nufu un
    - trāpītu, tad nākamajā gājienā Naf-nafs mestu bumbu pa Nif-nifu.
    - netrāpītu, tad Naf-Nafs mestu pa Nuf-Nufu, jo viņš ir precīzakais spēlētājs. Ja viņš
        - trāpītu, tad spēlē paliktu tikai Nif-nifs un Naf-nafs. Un Nif-nifs mestu bumbu nākamais.
        - netrāpītu, tad Nuf-nufs izsistu Naf-nafu, jo viņš ir precīzāks spēlētājs kā Nif-nifs. Spēlē paliktu tikai Nif-nifs un Nuf-nufs, bet arī šoreiz nākamais bumbu mestu Nif-nifs.

Lielākas izredzes uzvarēt (30%) Nif-nifam ir tad, ja pa viņu neviens cits spēlētājs nav metis ar bumbu, un viņš ir palicis divatā ar kādu citu sivēntiņu. Nevis gadījumā, ja Nif-nifs ir palicis divatā ar Naf-nafu un ir Naf-nafa gājiens. Šādā gadījumā ar 50% varbūtību Nif-nifs nemaz netiks pie sava gājiena.

2. Neparastā spēle

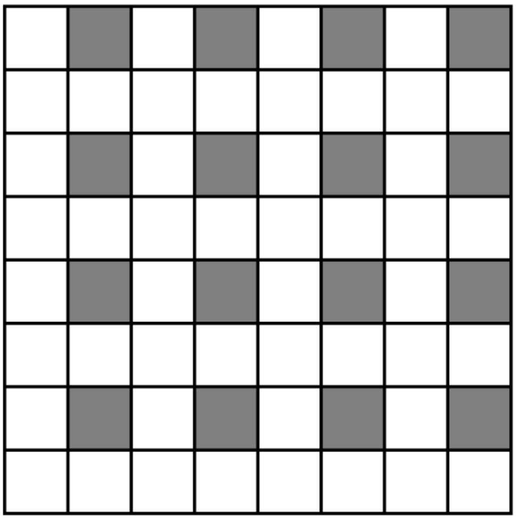
Māsiņas Inga un Laura nolēma mēroties spēkiem kādā neparastā spēlē. Šaha galdiņa (8×8 lauciņi) kreisajā apakšējā lauciņā viņas novietoja mazu figūriņu. Spēles noteikumi bija šādi: vienā gājienā figūriņu var pabīdīt vai nu 1 rūtiņu pa labi, vai 1 rūtiņu uz augšu, vai 1 rūtiņu pa diagonāli „uz augšu un pa labi” (skat. 1. att.); spēlētāji gājienus izdara pamīšus; zaudē tas, kurš vairs nevar izdarīt gājienu. Kura no meitenēm noteikti var panākt savu uzvaru, ja spēli sāk Laura?



1. att.

<u>Atrisinājums</u>

Laura vienmēr var uzvarēt, ja katrā savā gājienā viņa iebīda figūriņu kādā no pelēkajām rūtiņām (skat. 2. att.). Tādā gadījumā Inga savā gājienā ir spiesta figūriņu iebīdīt kādā no baltajām rūtiņām, un Laura var atkal to iebīdīt pelēkajā rūtiņā u.t.t. Inga vienmēr iebīdīs figūriņu kādā no baltajām rūtiņām, jo ar vienu gājienu nav iespējams no pelēkās rūtiņas nonākt citā pelēkā rūtiņā. Savukārt no jebkuras baltās rūtiņas vienmēr varēs nonākt kādā pelēkajā rūtiņā. Ievērojam, ka spēle beidzas tajā brīdī, kad kāda no spēlētājām figūru iebīda šaha galdiņa labajā augšējā lauciņā, jo šī ir vienīgā rūtiņa, no kuras nav iespējams izdarīt gājienu. Tā kā rūtiņa, kurā beigsies spēle, ir pelēka, tad Inga nevar uzvarēt. Tā kā kāds noteikti uzvar, tad tā būs Laura.



2. att.

3. Ziemassvētku dāvana

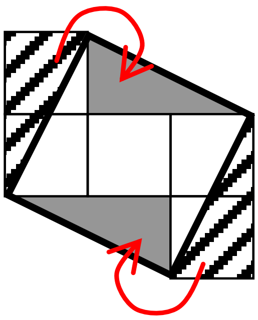
Juris gribēja apsveikt Andri Ziemassvētkos. Viņš zināja, ka Andrim labākā dāvana būtu lielisks matemātikas uzdevums. Tāpēc Juris Andrim uzdāvināja skaistu kuba formas dāvanu kasti, kurā bija ieliktas šokolādes tāfelītes, bet uz kastes vāka uzrakstīts:

> *Sagriez šo dāvanu kasti trīs daļās tā, lai no tām varētu izveidot kvadrātu! Tev ir jāizmanto viss kastes materiāls, izņemot tās vāku. Izveidotajā kvadrātā nedrīkst būt „caurumi”, turklāt kastes daļas nedrīkst pārklāties.*
>
> *Priecīgus Ziemassvētkus!*
>
> *Juris*

Palīdzi Andrim atrisināt Jura uzdevumu!

Atrisinājums

Lai izdarītu prasīto, uzzīmēsim dāvanu kastītes izklājumu (ievērojam, ka tai ir tikai 5 skaldnes). Viens no piemēriem, kā šo izklājumu sagriezt trīs daļās tā, lai no tām var salikt kvadrātu, attēlots 3. att.

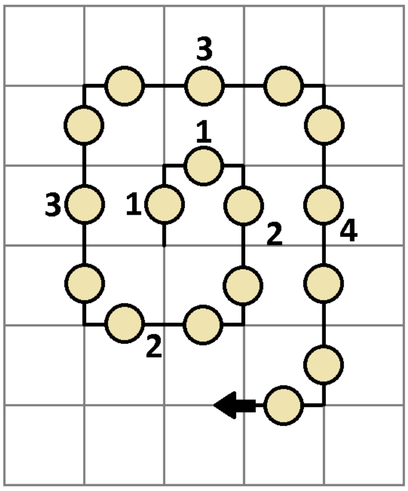


3. att.

4. Sniega kauja

Monika gatavojās lielajai sniega kaujai pret savu kaimiņieni Annu. Viņa taisīja lodveida sniega pikas. Lai nesajauktu piku skaitu, Monika domās sadalīja pagalmu kā rūtiņu plakni un, liekot pikas tā, lai to centri atrastos rūtiņu malu vidū, viņa no pagalma centra sāka veidot kvadrātisku spirāli, uz kuras malām atradās attiecīgi 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, … sniega pikas (skat. 2. att.). Tādā veidā meitene turpināja, līdz bija izveidojusi 1010 sniega pikas. Nolēmusi, ka nu jau būs gana, Monika devās mājās sasildīties ar siltu tēju un gaidīt kaujas sākumu.

Kāds ir lielākais piku centru skaits uz vienas taisnes?



2. att.

Atrisinājums

Naturālo skaitļu summa no 1 līdz n ir $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Šajā gadījumā piku skaits: $1+1+2+2+\cdots n+n=2(1+2+3+\cdots+n)=2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=n(n+1)$.

Tātad $n(n+1)\leq 1010$, lietojam „$\leq$”, jo kāda no rindām var nebūt pilna.

Novērtēsim n vērtību.Ievērojam, ka $\sqrt{1010}\approx 31{,}78$.

Apskatīsim, kāda būtu piku summa, ja pēdējās rindas piku skaits ir 31 vai 32:

$$31(31+1)=31\cdot 32=992,$$
$$32(32+1)=32\cdot 33=1056.$$

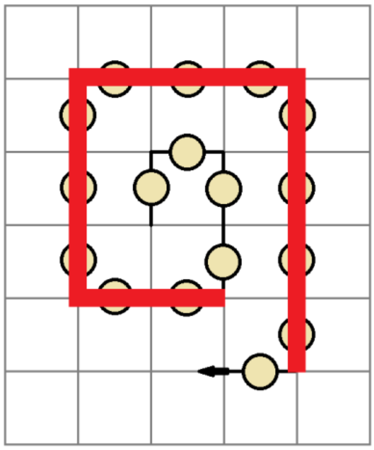
Tātad pēdējā pilnajā rindā būs 31 pika un pēdējā rindā būs $1010-992=18$ pikas.

Lai gan garākajā pilnajā rindā piku skaits ir 31, maksimālais piku skaits uz vienas taisnes ir **32** pikas.

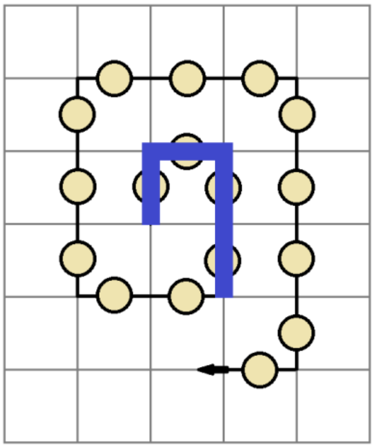
Par *lociņu* sauksim 3. att. atzīmēto sarkano figūru, kas sastāv no 4 sekojošiem posmiem – diviem horizontāliem un diviem vertikāliem. Monikas izveidotā lielā spirāle sastāv no daudziem šādiem *lociņiem* – katrā nākamajā *lociņā* ir par 8 pikām vairāk. Taisne vienu šādu figūru var krustot maksimums trīs reizes. Ievērosim, ka taisne spirālē trīs reizes var krustot vienlaicīgi tikai vienu šādu *lociņu*. Bet šādā gadījumā taisne noteikti nekrustos *zilo lauzto līniju* spirāles centrā (skat. 4. att.). Tātad visvairāk krustpunktus var iegūt, ja taisne katru šādu *lociņu* krusto tieši divas reizes.

Tā kā Monikas uztaisītās spirāles pēdējā pilnajā rindā ir 31 pika, tad viņai ir 1 zilā lauztā līnija spirāles centrā, 14 pilni *lociņi* un viens gandrīz pabeigts *lociņš* spirāles ārmalā. Tātad maksimālais piku skaits uz vienas taisnes ir $(1+14+1)\cdot 2=16\cdot 2=32$ pikas.

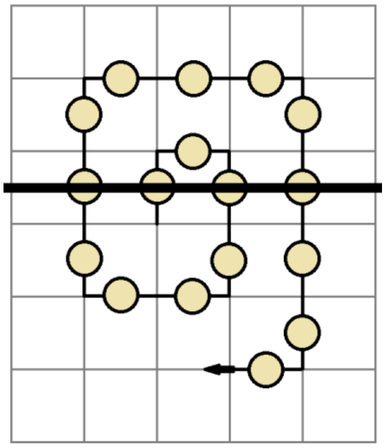
Pēdējā rindā piku skaits ir 18 – tas ir vairāk nekā puse no pikām, kuras var salikt uz šīs rindas ($32:2=16$, $18>16$). Tātad uz taisnes, kas iet caur spirāles vidu un ir perpendikulāra pirmajai piku rindai atradīsies 32 pikas (skat. 5. att.).



3. att.



4. att.



5. att.

5. Krāsainās lampiņas

Tuvojoties Ziemassvētkiem, Gatis nolēma izdekorēt savu māju. Viņam bija viena gara lampiņu virtene ar 150 sarkanām lampiņām un vēl kaste ar 150 lampiņām zaļā krāsā. Lai padarītu dekorāciju interesantāku, viņš nolēma virtenē nomainīt dažas lampiņas, lai tā būtu raibāka. Gatis galvā sanumurēja katru lampiņu šajā virtenē no 1 līdz 150. Tad viņš paņēma sarkano virteni un katras otrās sarkanās lampiņas vietā ielika zaļo lampiņu (tātad viņš nomainīja 2., 4., 6., …, 150. lampiņu). Novērtējis iznākumu, viņš nolēma, ka lampiņas nav vēl gana raibi izkārtotas, un, papildus paveiktajam, katras trešās lampiņas vietā ielika pretējās krāsas lampiņu (tas ir, ja lampiņa bija sarkana, tad viņš to nomainīja pret zaļu, bet, ja lampiņa bija zaļa – pret sarkanu). Tad Gatis vēlreiz pārdomāja un katru ceturto lampiņu atkal mainīja uz pretējo. Tā viņš turpināja līdz bija nomainīta arī katra piektā, sestā, septītā, …, simtu piecdesmitā lampiņa.
Kādā krāsā bija katra no lampiņām šajā virtenē pēc tam, kad Gatis bija beidzis darbošanos ar lampiņu virteni?

Atrisinājums

Beigās virtenē 1., 4., 9., 16., 25., 36., 49., 64., 81., 100., 121., 144. lampiņa būs sarkanā krāsā, bet pārējās lampiņas būs zaļā krāsā.
Ievērosim, ka katra no lampiņām tiek nomainīta tik reizes, cik tās kārtas numuram ir dalītāju mīnuss viens (jo lampiņas sāk mainīt ar katru otro). Piemēram, 6. lampiņa tiks nomainīta 3 reizes. Skaitļa 6 dalītāji ir 1, 2, 3 un 6. Tātad tā tiks nomainīta $4 - 1 = 3$ reizes.
Lampiņas, kuras tiks nomainītas pāra skaitu reižu būs sarkanas, bet lampiņas, kuras tiks nomainītas nepāra skaitu reižu – zaļas.
Visiem skaitļiem, izņemot skaitļu kvadrātus, ir pāra skaits dalītāju. Ja skaitli a var izdalīt ar kādu skaitli b, tad rezultātā iegūst skaitli c, kas arī ir skaitļa a dalītājs: $a = b \cdot c$.
Skaitļu kvadrātus a^2 dalot ar skaitli a, iegūsim to pašu skaitli a, jo $a^2 : a = a$. Visiem skaitļu kvadrātiem ir nepāra skaits dalītāju. Piemēram, skaitlim $16 = 4^2$ ir pieci dalītāji 1, 2, 4, 8, 16. Tātad 16. lampiņa tiks nomainīta pāra skaitu reižu (nepāra skaitlis mīnus viens).
Tātad visas lampiņas, kuru numuri ir skaitļu kvadrāti, tiks nomainītas pāra skaitu reižu, bet pārējās lampiņas – nepāra skaitu reižu.