PUNKTIŅŠ   Skaitīsim ģeometriskus objektus   Komentāri
3.03.2017

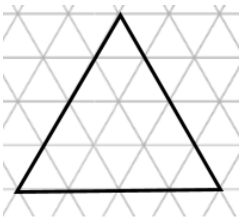
Nodarbības mērķis ir apgūt sistemātiskas klasificēšanas metodes, atklāt objektu uzskaitīšanas likumsakarības. Mācīties atrisināt uzdevumus dažādā veidā. Sistemātiska elementu klasificēšana vai uzskaitīšana ir viens no soļiem dažādu olimpiāžu uzdevumu risināšanā.

Uzdevumi

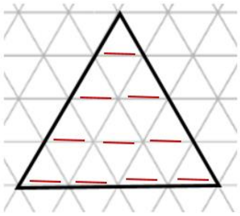
Ar zvaigznīti * apzīmēti grūti uzdevumi

1. Trijstūra malas garums ir 4. Saskaiti, cik nogriežņu garumā 1 ir dotajā trijstūrī! Izdomā divus vai trīs dažādus nogriežņu saskaitīšanas veidus! (skat. 1)!

Komentārs. Skolēniem ir jāskaita īsie nogriežņi un papildus jāpadomā par to, kā skaitīt tos citādi. Te skolēni dalās ar saviem atklājumiem, risinājumi tiek apspriesti kopīgi. Objektu skaitīšana var notikt pa slejām, sākot ar augšējo, vai apakšējo rindu. Var skaitīt tieši vai arī izmantot vizuālus paņēmienus – krāsainu zīmuli, lai ir redzams, kurš nogrieznis ir jau saskaitīts, vai arī nodzēšot jau saskaitītos elementus. Sistemātiskāks paņēmiens ir nogriežņu skaitīšana pa rindām, sākot, piemēram ar horizontālajām taisnēm (skat 1.b). Uz tām



1.



1. b

1. c

Ir atbilstoši 1 + 2 + 3 + 4 nogriežņi. Šajā trijstūru sistēmā ir 3 virzieni, kur katru raksturo paralēlās taisnes. No šejienes samērā vienkārši iegūt vispārīgu vienības nogriežņu aprēķināšanas formulu: $\frac{n(n+1)}{2}\cdot 3$, kur n ir ārējā trijstūra malas garums.

Kāds no skolēniem ieteica izmantot "šaha" krāsojumu, kā tas redzams zīmējumā 1. c. Katram tumšajam trijstūrim jāapvelk 3 līnijas – atliek tikai saskaitīt trijstūrus.

2. Cik pavisam nogriežņus tu vari saskaitīt dotajā kvadrātā (skat. 2)?

Komentārs. Šis piemērs prasa arī izpratni par uzdevuma dotajiem un prasībām. Te nav tieši noteikts kādus nogriežņus jāskaita – tas nozīmē, ka jāsaskaita visi diskrēta garuma nogriežņi, ko definē kvadrāta rūtiņas – nogriežņi garumā 1, garumā 2, 3, un 4. Jānoskaidro, kā sistemātiski skaitīt. Piemēram, vienā rindā skaitīt visus minētos nogriežņus, tad saskaitīt, cik ir horizontālo rindu, tikpat daudz arī vertikālo rindu. Viens no skolēniem ieteica izmantot tādu pašu principu kā 1. c gadījumā, lai saskaitītu visus nogriežņus garumā 1 – izkrāso kvadrātu kā šaha galdiņu un skaita tumšos kvadrātus, nedrīkst aizmirst tos ārējos nogriežņus, kuri nepieder tumšajiem kvadrātiem.

3. Cik dažādus kvadrātus tu vari saskaitīt (skat. 2)?
4. Cik dažādus trijstūrus tu vari saskaitīt (skat. 1)?

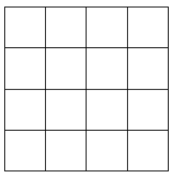
Piezīme. Šie divi uzdevumi līdzīgi iepriekšējiem – jārosina atrast vispārēju skaitīšanas likumu. Runājot par dažādo trijstūru skaitīšanu – var izmantot vairākus lielos trijstūrus, kuros atsevišķi var iekrāsot arī trijstūrus, kuru malas garums ir 2 vai 3 – tas uzskatāmi parāda, vai kāds trijstūris palicis neievērots, zemāk piemērs, kā atzīmēt trijstūrus ar malas garumu 2:

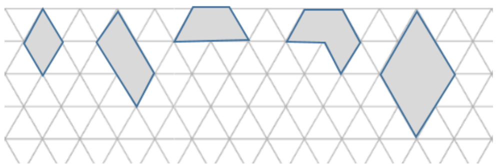
5. *Kā saskaitīt nogriežņus rūtiņu kvadrātā ar izmēru 100 x 100? Cik te ir kvadrātu?

Piezīme. Uzdevums ir 2. un 3. uzdevuma paplašināts gadījums, kas prasa sistemātisku pieeju. Uzdevums noderīgs, ja kādam skolēnam 2. un 3. uzdevumi šķiet pārāk viegli (pietiekami liels piemērs var būt arī rūtiņu kvadrāts ar izmēru 10 x 10).

Nogriežņu skaits: vienā rindā ir $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{100\cdot 101}{2}$. Horizontālo rindu skaits ir 101, tāpat arī vertikālo rindu skaits. Gala rezultāts $\frac{100\cdot 101}{2}\cdot 101\cdot 2=1020100$

Kvadrātus var skaitīt līdzīgi pa slejām – piemēram, kvadrāti ar izmēru 2 x 2 divās blakus rindās izvietojas 99. Rindu skaits no divām blakus esošām rindām ir 99. Tāpēc šādu kvadrātu skaits ir 99 x 99. Visu kvadrātu summa ir : $100\cdot 100+99\cdot 99+98\cdot 98+....+3\cdot 3+2\cdot 2+1=338350$



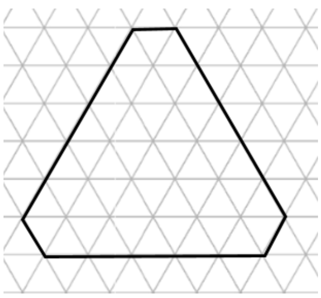


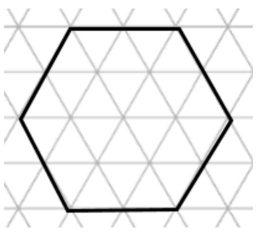
2. 3.

6. Cik dažādus rombiņus (skat. 3. pirmā figūra) vari saskaitīt trijstūrī 1? Cik ir pārējo veidu figūras no 3. zīmējuma?

Piezīme. Šis uzdevums ir 4. uzdevuma variants.

7. Vai attēlā 4. doto torti var sagriezt 23 vienādos gabalos, griežot pa redzamajām līnijām?





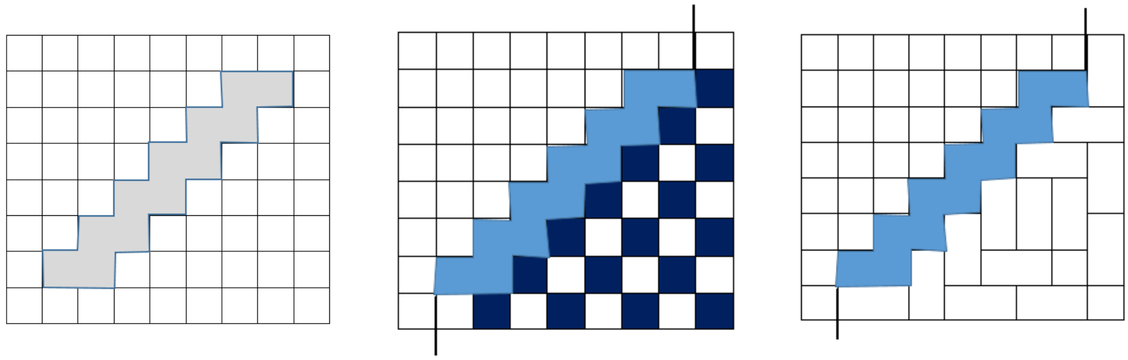
4. 5.

Risinājums. Attēlā dotajā trijstūra tortē kopumā ir 49 – 3 = 46 mazie trijstūrīši. Vienīgie vienādie gabaliņi var būt divu trijstūru veidotie rombi. Te der atcerēties 1. c zīmējumu: ja tortes virsmu izkrāso “šaha” veidā, tad katrs rombiņš satur vienu baltu, vienu melnu trijstūri. Diemžēl melno un balto trijstūru skaits atšķiras, tāpēc torti nevar sagriezt prasītajās daļās.

8. Sešstūrī (skat.5) dažus trijstūrus nokrāsojiet melnā krāsā tā, lai jebkuram melnam trijstūrim blakus būtu tieši 2 balti trijstūrī un jebkuram baltam trijstūrim blakus būtu 2 melni trijstūri.

Piezīme. Katram trijstūrim ir 3 malas. Aplūkojot kādu no centrālajiem trijstūrim – tam būs divi melni un viens balts kaimiņš, ja pats trijstūris ir baltā krāsā. Uzdevumam var būt dažādi atrisinājumi.

9. *No taisnstūra 9 x 8 ir izgriezti vairāki domino (skat. 6). Ar cik domino var noklāt atlikušo daļu? (Domino nedrīkst pārklāties.)



6.

Atrisinājums. Visu atlikušo taisnstūra daļu nevar noklāt ar domino. Sadalām taisnstūri divās vienādās daļās un aplūkojam vienu no tām. Izkrāsojam to šaha veidā. Tumšo kvadrātu ir 16, bet balto 14. Tāpēc te nevar novietot vairāk kā 14 domino. 14 domino izvietot var, tāpēc kopumā atlikušo taisnstūra daļu var pārklāt ar 28 domino.

Piezīme: eksperimentēšanai var izdrukāt triangulāru papīru (kas sadalīts vienādos trijstūros) no brīvi lejuplādējamo līniju papīru vietnes, piemēram:

http://geomegic.com/downloads/

Piezīme: 7. un 8. uzdevumi ir ņemti no krājuma: Екимова М. А., Кукин Г. П. (2002) Задачи на разрезание, МЦНМО