Nevienādību pierādīšana – nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

Teorija un piemēri, gatavojoties Atklātajai matemātikas olimpiādei 2017. gadā

Gatavojoties Novada matemātikas olimpiādei, tika aplūkota metode, kā pierādīt nevienādības, atdalot pilnos kvadrātus. Tomēr bieži vien sarežģītākas nevienādības neizdodas pierādīt izmantojot tikai šo paņēmienu, tāpēc ir lietderīgi zināt un prast pielietot citas metodes.

Iespējams, pati pazīstamākā un biežāk lietotā ir nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko. Bieži to saīsināti apzīmē kā $A \geq G$ (angliski: $AM\text{-}GM$, arithmetic mean - geometric mean).

Definīcija. Par n skaitļu $a_1, a_2, \dots, a_n$ vidējo aritmētisko sauc lielumu $\frac{a_1+a_2+\cdots a_{n-1}+a_n}{n}$.

Definīcija. Par n nenegatīvu skaitļu $a_1, a_2, \dots, a_n$ vidējo ģeometrisko sauc lielumu $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko
Ja $a_1, a_2, \dots, a_n$ ir nenegatīvi skaitļi, tad

$$\frac{\boldsymbol{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}}{\boldsymbol{n}} \geq \sqrt[n]{\boldsymbol{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}},$$

tas ir, skaitļu vidējais aritmētiskais ir lielāks vai vienāds ar šo skaitļu vidējo ģeometrisko, turklāt vienādība ir tad un tikai tad, ja visi skaitļi ir vienādi.

Secinājumi

- Ja $n = 2$, tad nevienādība apgalvo, ka $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ nenegatīviem skaitļiem x un y.
- Ja $n = 3$, tad nevienādība apgalvo, ka $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ nenegatīviem skaitļiem x, y un z.
- Dažreiz novērtējumu ir ērti lietot formā $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.
- Pozitīviem skaitļiem x un y izpildās nevienādība $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, tas ir, skaitļa un tam apgrieztā skaitļa summa ir vismaz 2.
- Ja x ir pozitīvs skaitlis, tad $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Uzdevumu piemēri

1. Pierādīt, ka $3a^8 + 5b^8 \geq 8a^3b^5$, ja a un b – pozitīvi skaitļi!
Atrisinājums. Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam

$$3a^8 + 5b^8 = a^8 + a^8 + a^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 + b^8 \geq 8 \cdot \sqrt[8]{a^8 \cdot a^8 \cdot a^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8 \cdot b^8} = 8a^3b^5.$$

2. Pierādīt, ka $a^{11} - 3a^5 + a^4 + 1 \geq 0$, ja a ir nenegatīvs skaitlis!
Atrisinājums. Pietiek pierādīt dotajai nevienādībai ekvivalentu nevienādību $a^{11} + a^4 + 1 \geq 3a^5$.
No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet vajadzīgais:

$$a^{11} + a^4 + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^{11} \cdot a^4 \cdot 1} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^{15}} = 3a^5.$$

3. Pierādīt, ka $(1 + ab)(1 + ac)(1 + bc) \geq 8abc$, ja a, b un c ir pozitīvi skaitļi!
Atrisinājums. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$1 + ab \geq 2\sqrt{ab}; \qquad 1 + ac \geq 2\sqrt{ac}; \qquad 1 + bc \geq 2\sqrt{bc}.$$

Sareizinot iegūtās nevienādības (to drīkst darīt, jo katras nevienādības abas puses ir pozitīvas), iegūstam

$$(1 + ab)(1 + ac)(1 + bc) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bc} = 8\sqrt{abacbc} = 8abc.$$

4. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c izpildās nevienādība $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$.

Atrisinājums. Reizinot abas nevienādības puses ar $a+b+c>0$, iegūstam

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$$

Novērtēsim nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 3+2+2+2=9,$$

kas arī bija jāpierāda.

5. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y pastāv nevienādība $x^2y^2(x^2+y^2-3)\geq -1$.

Atrisinājums. Ja $x=0$ vai $y=0$, tad $0\geq -1$ un nevienādība ir patiesa.

Ja $x\neq 0$ un $y\neq 0$, tad, dalot nevienādības abas puses ar $x^2y^2>0$, iegūstam

$$x^2+y^2-3\geq -\frac{1}{x^2y^2};$$

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}\geq 3.$$

Nevienādības kreisās puses izteiksmei lietojam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}}=3.$$

6. Pierādīt, ka $a-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d}\geq 6$, ja $a>b>c>d$.

Atrisinājums. Nevienādības kreisās puses izteiksmei pieskaitām un atņemam vienus un tos pašu saskaitāmos un pēc tam lietojam nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$a-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d}=a-b+b-c+c-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d}=$$
$$=(a-b)+(b-c)+(c-d)+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d}=$$
$$=(a-b)+\frac{1}{a-b}+(b-c)+\frac{1}{b-c}+(c-d)+\frac{1}{c-d}\geq 2+2+2=6.$$

7. Kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $x+\frac{2017}{x}$, ja $x>0$?

Atrisinājums. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$x+\frac{2017}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2017}{x}}=2\sqrt{2017}.$$

Šo vērtību izteiksme sasniedz, ja abi saskaitāmie ir vienādi, tas ir, $x=\frac{2017}{x}$ jeb $x^2=2017$ un $x=\sqrt{2017}$.

Ievēro! Uzdevuma, kurā jāatrod lielākā (mazākā) vērtība, atrisinājumam jāsastāv no divām daļām:
1) jāatrod vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2) jāpierāda, ka lielāku (mazāku) vērtību iegūt nevar.

Literatūra

- A.Ločmele, I.Palma, L.Ramāna, A.Andžāns «Nevienādību pierādīšanas metodes», 1997 http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2014/05/Nvd_pier.pdf
- J.Herman, R.Kučera, J.Šimša «EQUATIONS AND INEQUALITIES. Elementary problems and Theorems in Algebra and Number Theory», Springer, 2000
- Mazās matemātikas universitātes lekcija "Nevienādības starp vidējiem" materiālu http://nms.lu.lv/mmu/m-g/
- Neklātienes nodarbības vidusskolēniem http://nms.lu.lv/nnv/m-g/