„Profesora Cipariņa kluba” 2016./2017. mācību gada

4. nodarbība. **Uzdevumu īsi atrisinājumi.**

1. Ledāju kušana

Antarktīdā zinātnieki ir izveidojuši vairākas polārstacijas. Vienā no tām strādā zinātnieks Dainis. Viņš ir konstatējis, ka atrodas uz apgabala Antarktīdā, kas pēc dažām stundām atdalīsies no kontinenta. Dainis zina, ka 160 km attālumā atrodas cita polārstacija (pagaidām neapdraudētā apgabalā). Viņam ir sniega motocikls, kurā var iepildīt degvielu 100 km nobraukšanai (šobrīd bāka ir tukša), un degviela 400 km liela attāluma veikšanai. Kā, izmantojot tikai šo degvielu un sniega motociklu, Dainis var laicīgi nokļūt otrā polārstacijā? Viņš pa ceļam drīkst ierīkot pagaidu degvielas noliktavas, tur atstājot daļu bākas satura. Pārvadāt sniega motociklā citu degvielu bez tās, kas tajā iepildīta, nav iespējams.

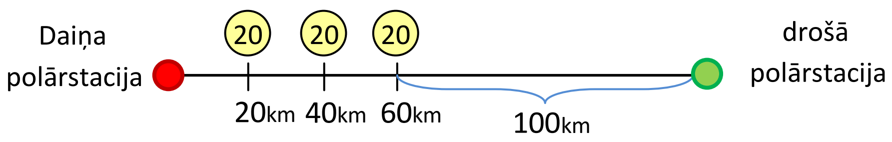
Atrisinājums

Pirmajā reizē Dainim ir jāuzpilda sniega motociklā degvielu, kas paredzēta 100 km veikšanai. Tad jābrauc otras polārstacija virzienā 20 km, jāierīko tur degvielas noliktava ar degvielu, kas paredzēta 60 km veikšanai, un jāatgriežas atpakaļ.

Otrajā reizē jāuzpilda sniega motocikls ar degvielu, kas paredzēta 100 km veikšanai. Tad jābrauc otras polārstacija virzienā 20 km. Jāpaņem no turienes degviela 20 km veikšanai un jābrauc otras polārstacijas virzienā vēl 40 km. Jāierīko tur otra degvielas noliktava ar degvielu 20 km veikšanai. Jābrauc atpakaļ uz pirmo noliktavu. Jāpaņem no turienes degviela 20 km veikšanai un jāatgriežas savā polārstacijā. Tagad starp abām polārstacijām atrodas divas noliktavas – 20 km un 60 km attālumā no Daiņa polārstacijas katrā ar degvielu 20 km veikšanai.

Trešajā reizē atkal jāuzpilda sniega motocikls ar degvielu 100 km veikšanai. Jābrauc 40 km otras polārstaijas virzienā un jāierīko tur trešā noliktava ar degvielu 20 km veikšanai, un jābrauc atpakaļ. Tagad starp abām polārstacijām atrodas 3 noliktavas ik pa 20 km katrā ar degvielu 20 km veikšanai (skat. 1. att.).

Ceturtajā reizē atkal jāuzpilda sniega motocikls ar degvielu 100 km veikšanai (tagad ir paņemta visa degviela no Daiņa polārstacijas). Jābrauc uz 1. noliktavu, jāpaņem tur esošā degviela 20 km veikšanai un jābrauc tālāk uz nākamo noliktavu, kas atrodas 20 km attālumā no pirmās. Jāpaņem visa degviela no šīs noliktavas un jābrauc uz pēdējo noliktavu, kas atrodas 60 km attālumā no Daiņa polārstacijas. Pēdējā noliktavā jāpaņem visa degviela un šajā brīdī sniga motocikla tvertne ir pilna ar degvielu – ar to var veikt 100 km. Tā kā 60 km jau ir nobraukti, tad Dainis paspēs laicīgi nokļūt otrā polārstacijā.



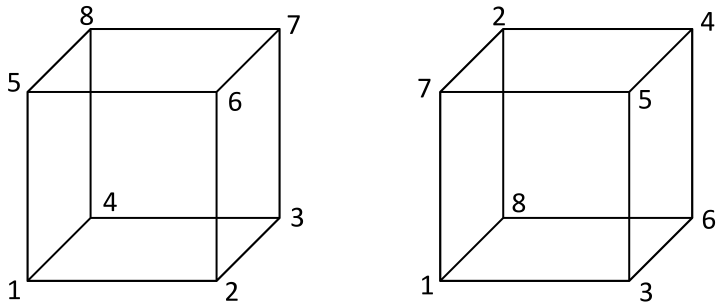
1. att.

2. Garšīgais zefīrs

Ģimenes pārgājiena laikā pie ugunskura Annija cepa īpaši lielu kuba formas zefīru. Diemžēl zefīrs iepatikās arī netālu dzīvojošām lapsenēm – tās apsēdās uz zefīra virsotnēm (uz katras kuba virsotnes tieši viena lapsene). Annija pārbijās no lapsenēm un iekliedzās. Sabijušās no kliedziena, lapsenes pacēlās gaisā, bet, sapratušas, ka briesmas tām nedraud, lapsenes atkal nolaidās uz zefīra dažādām virsotnēm (uz katras virsotnes – viena lapsene). Sauksim divas lapsenes par *kaimiņienēm*, ja tās atrodas vienas zefīra šķautnes galapunktos. Vai var gadīties, ka visas lapsenes, kas sākumā bija savstarpējas *kaimiņienes*, tagad tādas vairs nav?

<u>Atrisinājums</u>

Jā, tā var gadīties. Sanumurēsim lapsenes ar cipariem no 1 līdz 8 (skat. 2. att.).



Pirms pacelšanās Pēc nolaišanās

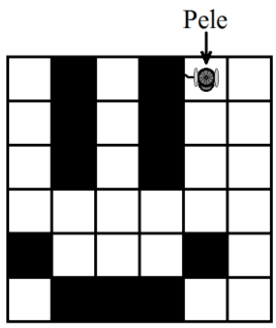
2. att.

3. Labirints

Kaķis Miķelis $120 \times 120 \times 20$ cm lielā kastē, kuras pamats ir kvadrāts, ir izveidojis labirintu pelei, ko šorīt noķēra. Kastes pamats ir sarūtots kā rūtiņu lapa tā, ka mazo kvadrātu izmērs ir 20×20 cm. Miķelim ir vairāki smagi paralēlskaldņi ar izmēriem $20 \times 20 \times 20$ cm, kurus viņš ir salicis uz rūtiņām kastes pamatā, lai izveidotu labirinta struktūru. Vai Miķelis varēja izveidot labirintu tā, lai pele, visu laiku turoties ar vienu ķepu pie labirinta sienas, noietu 1080 cm un atgrieztos sākuma stāvoklī?

Piezīme. Pele iet gar pašu sienu, un tiek pieņemts, ka tās noietā ceļa garums sakrīt ar sienas garumu, gar kuru tā iet.

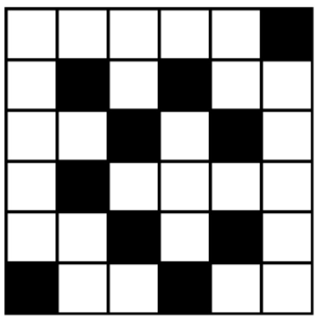
Piemērs. 3. att. redzamā labirinta gadījumā pele noietu 800 cm.



3. att.

<u>Atrisinājums</u>

Jā, skat., piemēram, 4. att., kur 1 rūtiņas malas garums ir 20 cm; iekrāsotie kvadrātiņi ir izmantotie paralēlskaldņi. Pele šajā gadījumā noietu $54 \cdot 20 = 1080\ cm$.



4. att.

„Profesora Cipariņa kluba” 2016./2017. mācību gada
4. nodarbība. **Uzdevumu īsi atrisinājumi.**

4. Neērtais pacēlājs

Šodien ziemas priekus uz sniegotā kalna aizbrauca baudīt Anna ar klasesbiedriem. Šajā kalnā, lai izmantotu pacēlāju, ir jāpērk biļetes. Ir iespēja iegādāties trīs dažādu veidu biļetes – 6 braucienu, 9 braucienu vai 20 braucienu. Kāds ir lielākais skaits braucienu ar pacēlāju, ko Anna ar klasesbiedriem nevar iegādāties?

Piemērs. Viņi var iegādāties 15 braucienus, nopērkot vienu 6 un vienu 9 braucienu biļeti, bet viņi nevar iegādāties tieši 13 braucienu biļetes.

Atrisinājums
Lielākais skaits braucienu ar pacēlāju, ko nevar iegādāties, ir 43.

- Pamatosim, ka 43 braucienus nav iespējams iegūt. Ja tiek izmantotas tikai 6 un 9 braucienu biļetes, tad varēs nopirkt tikai tādu skaitu braucienu, kas dalās ar 3, jo $6x + 9y = 3(2x + 3y)$.
  Ja tiek izmantota viena 20 braucienu biļete, tad paliek vēl 23 braucieni, bet arī 23 nedalās ar 3.
  Ja tiek izmantotas divas 20 braucienu biļetes, tad paliek vēl 3 braucieni, bet mazākais braucienu skaits, ko var nopirkt ir 6.
  Ja tiek izmantotas trīs 20 braucienu biļetes, tad tiek nopirkti vismaz 60 braucieni, kas ir vairāk nekā 43.
- Visus pārējos skaitus braucienu ir iespējams iegūt, jo
  - $44 = 20 + 9 \cdot 2 + 6$ (dalot ar 6, dod atlikumā 2)
  - $45 = 9 \cdot 5$ (dalot ar 6, dod atlikumā 3)
  - $46 = 20 \cdot 2 + 6$ (dalot ar 6, dod atlikumā 4)
  - $47 = 20 + 9 \cdot 3$ (dalot ar 6, dod atlikumā 5)
  - $48 = 9 \cdot 4 + 6 \cdot 2$ (dalot ar 6, dod atlikumā 0)
  - $49 = 20 \cdot 2 + 9$ (dalot ar 6, dod atlikumā 1)
  - Pārējos braucienu skaitus iegūst, šiem pieskaitot attiecīgo daudzumu 6 braucienu biļešu.

5. Starpbrīdis

Juris un Andris starpbrīdī starp mūzikas un matemātikas stundu nolēma uzspēlēt kādu spēli. Viņi no līdzi paņemtajiem valriekstiem izveidoja vairākas grupas. Spēlētāji uz maiņām izvēlas katrā gājienā vienu grupu, no kuras paņem vismaz vienu valriekstu.
Uzvar tas spēlētājs, kurš paņem pēdējo valriekstu. Spēli vienmēr sāk Juris. Kurš no abiem puišiem, pareizi spēlējot, uzvarēs, ja

a) valrieksti ir sakārtoti divās grupās – katrā grupā pa 3 valriekstiem;
b) valrieksti ir sakārtoti trīs grupās – pa 1; 2 un 3 valriekstiem;
c) valrieksti ir sakārtoti trīs grupās – pa 2; 4 un 5 valriekstiem?

Atrisinājums

a) Uzvarēs Andris. Viņam ir jāveic simetriski gājieni Jura gājieniem. Ja Juris paņem no vienas kaudzītes 1 valriekstu, tad Andris paņem no otras kaudzītes 1 valriekstu. Ja Juris paņem divus valriekstus – arī Andris paņem divus utt. Ja Juris paņems pēdējo valriekstu no vienas no kaudzītēm, tad Andris paņems pēdējo valriekstu no otras kaudzītes un uzvarēs spēli. Tātad Andris vienmēr varēs uzvarēt, ja pēc viņa gājiena paliks divas kaudzītes ar vienādu riekstu skaitu tajās.

b) Arī šajā gadījumā vienmēr uzvarēs Andris. Viņa uzdevums ir panākt, lai pēc viņa gājiena paliktu divas kaudzītes ar vienādu riekstu skaitu tajās.
Apskatīsim visus iespējamos Jura gājienus.

„Profesora Cipariņa kluba" 2016./2017. mācību gada
4. nodarbība. **Uzdevumu īsi atrisinājumi.**

Situācija pēc Jura pirmā gājiena	Situācija pēc Andra pirmā gājiena	Uzvarētājs
0; 2; 3	0; 2; 2	Andris
1; 1; 3	1; 1; 0	Andris
1; 0; 3	1; 0; 1	Andris
1; 2; 2	0; 2; 2	Andris
1; 2; 1	1; 0; 1	Andris
1; 2; 0	1; 1; 0	Andris

Tālāk Andris izmantot iepriekš aprakstīto simetrijas ideju, lai uzvarētu Juri.

c) Šajā gadījumā uzvarēs Juris.

Tātad gadījumos, kad pēc Andra gājiena paliek vai nu divas riekstu kaudzītes ar vienādu riekstu daudzumu, vai trīs kaudzītes ar 1, 2 un 3 riekstiem, uzvarēs Andris. Apskatīsim iespējamos Jura pirmos gājienus gadījumā, kad ir trīs kaudzītes ar 2, 4 un 5 riekstiem tajās.

Situācija pēc Jura pirmā gājiena	Situācija pēc Andra pirmā gājiena	Uzvarētājs
1; 4; 5	?	?
0; 4; 5	0; 4; 4	Andris
2; 3; 5	2; 3; 1	Andris
2; 2; 5	2; 2; 0	Andris
2; 1; 5	2; 1; 3	Andris
2; 0; 5	2; 0; 2	Andris
2; 4; 4	0; 4; 4	Andris
2; 4; 3	2; 1; 3	Andris
2; 4; 2	2; 0; 2	Andris
2; 4; 1	2; 3; 1	Andris
2; 4; 0	2; 2; 0	Andris

Tātad, ja Juris darīs kādu citu gājienu kā pirmo aprakstīto (atstājot uz galda trīs kaudzītes ar 1, 4 un 5 valriekstiem tajās), viņš noteikti zaudēs.

Apskatīsim, kādi ir iespējamie Andra gājieni pēc tam, kad Juris uz galda ir atstājis trīs kaudzītes ar 1, 4 un 5 valriekstiem tajās.

Situācija pēc Andra pirmā gājiena	Situācija pēc Jura otrā gājiena	Uzvarētājs
0; 4; 5	0; 4 ; 4	Juris
1; 3; 5	1; 3; 2	Juris
1; 2; 5	1; 2; 3	Juris
1; 1; 5	1; 1; 0	Juris
2; 0; 5	2; 0; 2	Juris
1; 4; 4	0; 4; 4	Juris
1; 4; 3	1; 2; 3	Juris
1; 4; 2	1; 3; 2	Juris
1; 4; 1	1; 0; 1	Juris
1; 4; 0	1; 1; 0	Juris