Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds

I E G U L D Ī J U M S   T A V Ā   N Ā K O T N Ē

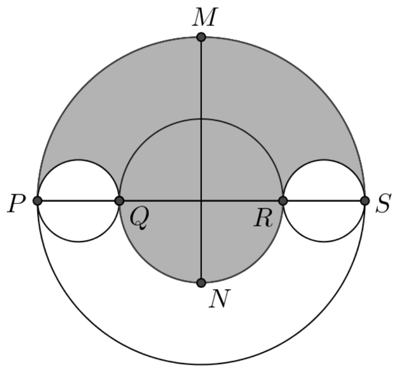
Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Doti 63 dažādi naturāli skaitļi, kuru summa ir 2017. Atrodiet šos skaitļus un pamatojiet, ka citu nav!

2. Uz taisnes atlikti punkti P, Q, R un S tā, ka $PQ = RS$ (skat. 1. att.). Nogriežņi PQ, RS, PS, QR ir riņķu diametri. Nogrieznis MN ir iekrāsotās figūras simetrijas ass. Pierādīt, ka iekrāsotās figūras laukums ir vienāds ar laukumu riņķim, kura diametrs ir MN.



1. att.

3. Naturālā piecciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, un ieguva pierakstu $GANGA$. Zināms, ka $GANGA$, dalot ar 7, dod atlikumu A, $GANGA$, dalot ar 11, dod atlikumu N, bet $GANGA$, dalot ar 13, dod atlikumu G, turklāt $G > A > N$. Kāds varēja būt sākotnējais skaitlis?

4. Pierādīt, ka $x^4 - x^2 - 3x + 4 > 0$ visiem reāliem x.

5. Katra no bumbiņām, kas atrodas kastē, nokrāsota vienā no N krāsām, un uz katras uzrakstīts naturāls skaitlis, kas nepārsniedz N. Zināms, ka katra no N krāsām izmantota vismaz vienu reizi, tāpat arī katrs skaitlis, kas nepārsniedz N, izmantots vismaz vienu reizi. Kādām N vērtībām kastē noteikti varēs atrast N dažādu krāsu bumbiņas, uz kurām būs rakstīti N dažādi skaitļi?

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas un matemātikas fakultāte
A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Dots, ka b un c ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2 - bx + c = 0$ reālās saknes ir x_1 un x_2. Pierādīt, ka **a)** $x_1^2 + x_2^2 + 2017$; **b)** $x_1^3 + x_2^3$ ir naturāls skaitlis!

2. Dots pirmskaitlis, kas satur vismaz 4 dažādus ciparus. Pierādīt, ka tā ciparus var pārkārtot citā secībā tā, lai jauniegūtais skaitlis nebūtu pirmskaitlis!

3. Četrstūris $ABCD$ ir ievilkts riņķa līnijā ω_1, bet $ABCD$ malu viduspunkti atrodas uz riņķa līnijas ω_2. Pierādīt, ka $\sphericalangle ABD + \sphericalangle BDC = 90°$.

4. Dotas 40 kartītes, uz divām no tām uzrakstīts skaitlis 1, uz divām – skaitlis 2, ..., uz divām – skaitlis 20. Kāds ir lielākais iespējamais komplektu skaits, ko vienlaicīgi var izveidot no šīm 40 kartītēm tā, lai katrā komplektā būtu trīs kartītes, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 21?

5. Seši tūristi bija devušies vairākos ceļojumos uz sešām valstīm, katrā ceļojumā viens tūrists apceļoja tieši vienu valsti. Ja izvēlamies jebkuras trīs valstis un jebkurus trīs tūristus, tad vismaz viens no viņiem ir bijis ceļojumā uz kādu no šīm valstīm. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais ceļojumu skaits?

Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Cik ir tādu piecciparu skaitļu, kam katrs nākamais cipars ir lielāks par iepriekšējo?

2. Kurš no skaitļiem $\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{5}}$un $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{7}}$ ir lielāks?

3. Trīs riņķa līnijas ω_1, ω_2 un ω_3 krustojas punktā O. Riņķa līnijas pa pāriem krustojas arī punktos P (ω_1 un ω_2), R (ω_2 un ω_3) un S (ω_1 un ω_3). Uz ω_1 loka PS, kas nesatur O, izvēlēts punkts A, taisne AP vēlreiz krusto ω_2 punktā B, un taisne AS vēlreiz krusto ω_3 punktā C. Pierādīt, ka punkti B, R un C atrodas uz vienas taisnes!

4. Pierādīt, ka no jebkuriem 17 naturāliem skaitļiem var izvēlēties 9 skaitļus tā, lai to summa dalītos ar 9.

5. Uz riņķa līnijas atzīmēti N punkti tā, ka šie punkti ir regulāra N-stūra virsotnes. Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli: Viņi pārmaiņus novelk pa vienai hordai, kas savieno divus atzīmētos punktus uz riņķa līnijas tā, lai novilktā horda nekrustotos ar agrāk novilktajām hordām. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena no novilktajām hordām izveidojas trijstūris. Kurš spēlētājs noteikti var uzvarēt, ja A izdara pirmo gājienu un **a)** $N = 14$; **b)** $N = 15$?

Latvijas 67. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem

1. Doti tādi skaitļi a, b un c, ka $a+c=\frac{b}{3}$, turklāt neviens no skaitļiem a, b, c nav 0. Pierādīt, ka $f(x)=ax^2+bx+c$ grafiks noteikti krusto x asi kādā intervāla $[-1;1]$ punktā!

2. Pierādīt, ka $\sqrt{x^2+y^2}+\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{xy} \geq x+y$, ja x un y ir reāli pozitīvi skaitļi!

3. Dots taisnstūris $ABCD$. Uz taisnes BD atlikts punkts E, tā ka D atrodas starp B un E. Uz taisnes EC atlikts punkts F tā, ka BF ir paralēls AC. Pierādīt, ka trijstūra BEF laukums ir lielāks nekā taisnstūra $ABCD$ laukums!

4. Naturālu skaitli sauksim par *skaistu*, ja tā visu naturālo dalītāju summa (ieskaitot 1 un pašu skaitli) ir nepāra skaitlis. Atrast mazāko naturālo skaiti k ar īpašību: starp jebkuriem patvaļīgi izvēlētiem k *skaistiem* skaitļiem var izvēlēties divus dažādus skaitļus tā, lai to reizinājums būtu naturāla skaitļa kvadrāts!

5. Kādā valstī no parlamenta deputātiem ir izveidotas 100 komisijas. Katram deputātam ir pienākums strādāt vismaz vienā komisijā, taču deputāti drīkst strādāt arī vairākās komisijās. Deputāti par darbu komisijās katru mēnesi saņem atalgojumu pēc šāda principa:

- par darbu pirmajā komisijā netiek maksāts atalgojums;
- par darbu katrā nākamajā komisijā tiek maksāts par 10 eiro vairāk nekā par darbu iepriekšējā komisijā (tas ir, par darbu otrajā komisijā tiek maksāti 10 eiro, par darbu trešajā komisijā tiek maksāti 20 eiro utt.).

Zināms, ka jebkurām divām dažādām komisijām ir tieši viens kopīgs deputāts, kas darbojas tajās abās. Cik liels ir visu deputātu kopējais mēneša atalgojums par darbu komisijās?