

PUNKTIŅŠ Maģiskie kvadrāti. Komentāri

7.04.2017

Nodarbības mērķis: šoreiz nodarbības pamatmērķis ir gatavoties uz Atklāto Matemātikas Olimpiādi, kur organizatori ir noteikuši, ka viens no jaunāko klašu uzdevumiem būs par maģiskajiem kvadrātiem. Pulciņā jau ir bijusi viena līdzīga nodarbība “Maģiskās figūras”. Šoreiz pievērsamies tieši skaitļu izvietojumam kvadrātveida tabulā. Mācāties nevis haotiski “uzbrukt” uzdevumam, bet vispirms pētīt skaitļu izvietojuma īpašības.

Uzdevumi

Ar * apzīmēti grūtāki uzdevumi

1. Aizpildi tukšās rutiņas zīmējumos a) un b), lai būtu izmantoti visi skaitļi no 1 - 9 un summas katrā rindā, kolonā un abās diagonālēs būtu 15:

		6
		1
4	3	8

a)

		4
	5	3
		8

b)

Piezīme. Šis ir iesildīšanās uzdevums – izveidot maģisko kvadrātu.

Par **maģisko kvadrātu** saucim tādu kvadrātu, kurā skaitļu summas visās rindās, visās kolonās un uz abām diagonālēm ir vienādas.

2. ¹Aizpildi tukšās rutiņas zīmējumā c), lai būtu izmantoti visi skaitļi no 1 - 16 un summas katrā rindā, kolonā un abās diagonālēs būtu 34!

9			4
	3	10	
	13	8	
7			14

c)

Risinājums. Aplūkojam ierakstīto skaitļu summas rindās un kolonās (skat. tabulā zilā krāsā). Tad šajās rindās un kolonās trūkstošās divu skaitļu summas ir tabulā sarkanā krāsā. Uzrakstīsim arī visus skaitļus, kuri vēl nav ierakstīti tabulā (skat. zem tabulas) un meklēsim skaitļu pārus, kuri veido nepieciešamās summas.

¹ 1., 2. un 3. uzdevumi ir atrasti Kembridžas Universitātes mājas lapā NRICH

9			4	13	21
	3	10		13	21
	13	8		21	13
7			14	21	13
16	16	18	18		
18	18	16	16		

1; 2; 5; 6; 11; 12; 15; 16

Summa 13: (2; 11) un (1; 12)

Summa 21: (6; 15) un (5; 16)

Summa 16: (1; 15) un (5; 11)

Summa 18: (2; 16) un (6; 12)

Te vērojama zināma simetrija. Ar loģisku spriedumu palīdzību skaitļi jāizvieto tabulā.

Atbildes var būt divas:

9	16	5	4
6	3	10	15
12	13	8	1
7	2	11	14

9	6	15	4
16	3	10	5
2	13	8	11
7	12	1	14

3. Madara ierakstīja katrā rūtiņu tabulas 4 x 4 rindā visus vienādus skaitļus, bet kolonās dažādus (katrai rindai tika izvēlēts cits naturāls skaitlis). Tad katras kolonas visus skaitļus pareizināja ar kādu naturālu skaitli – katru kolonu ar citu skaitli. Diemžēl daudzas tabulas rūtiņas izdzisa. Vai vari restaurēt skaitļus, aplūkojot atlikušos dažus skaitļus (Skati zīmējumu d))? Zināms, ka Madara reizināja skaitļus 2,3, ... 8. Viens no skaitļiem atkārtojās rindā un kolonā.

			12
			15
16		40	
12			

d)

Komentārs. Atrisinājumā jāizmanto skaitļu sadalījums reizinātājos. Tā pēdējā kolonā skaitļu kopīgais reizinātājs ir 3. Tad zinām, ka pirmajā rindā reizinātājs ir 4, otrajā 5. Tā soli pa solim uzdevumu var viegli atrisināt.

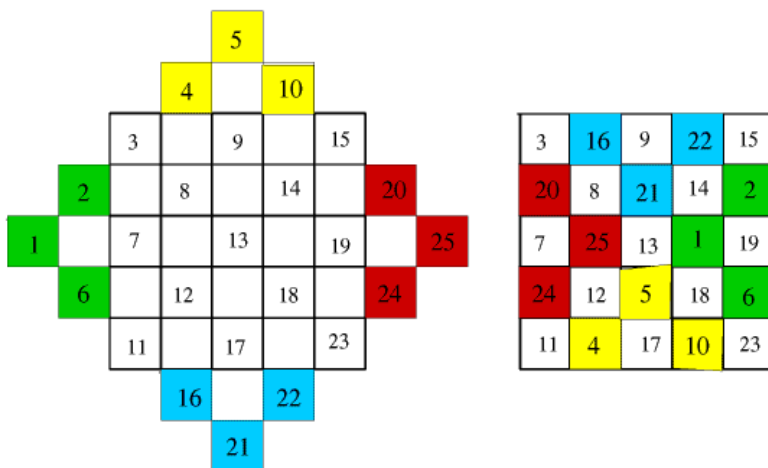
Atbilde:

	2	5	7	3
4	8	20	28	12
5	10	25	35	15
8	16	40	56	24
6	12	30	42	18

4. Izveido maģisko kvadrātu no 3 x 3 rūtiņām, tajā ierakstot skaitļus no 7 – 15.

Komentārs. Ir savdabīga metode maģiskā kvadrāta izveidošanai, ja kvadrāta izmērs ir nepāra skaitlis.

Piemēram, kvadrātu 5 x 5 rūtiņas ar skaitļiem var piepildīt sekojošā veidā – skaitļus raksta diagonālēs pa 5 pēc kārtas. Vidū “izgriež” kvadrātu un tad kreiso “ausi” pārraksta pie kvadrāta labās malas, labo konfigurāciju pārvieto pie kreisās malas, augšējo – apakšā un apakšējo – augšā:



Šāda ideja ir prezentēta rakstā **Del Hawley: “Magic Squares”**, <https://nrich.maths.org/1337>

Lai zinātu, kāda ir maģiskā kvadrāta rindas summa, vispirms aprēķinām kopējo skaitļu summu no 1 līdz 25 (jaunāko klašu skolēniem labi saprotama ir skaitļu saskaitšanas Gausa metode)

1	2	3	4	22	23	24	25
25	24	23	22	4	3	2	1

Šeit ir 25 skaitļu pāri un katra pāra skaitļu summa ir 26. Kopējā summa ir $\frac{25 \cdot 26}{2} = 325$, jo tādā veidā katrs skaitlis ir ieskaitīts 2 reizes. Vienā rindā ir piektā daļa no šīs summas (jo ir 5 rindas, kurās summa ir vienāda), tas ir 65.

Ar kvadrātiem, kuri ir pāra pakāpes, rīkojas citādi, piemēram, (tajā pašā rakstā) – maina skaitļus uz diagonālēm:

	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Piezīme. Interesantu maģiskā kvadrāta aizpildīšanas metodi parādīja viens no skolēniem. Maģiskais kvadrāts tiek aizpildīts ar šaha zirdziņa gājienu palīdzību – jāiztēlojas, ka kvadrāts ir it kā “uzlīmēts” uz cilindra reizēm horizontālā, reizēm vertikālā virzienā. Detalizētu šīs metodes aprakstu var atrast mājas lapā: <http://www.mathsmagic.in/chris-horse-method.html>

5. Vai vari kvadrātā 3×3 ierakstīt visus dažādus naturālus skaitļus, kuri nedalās ar 3, bet to summa katrā rindā un katrā kolonā dalās ar 3?

Piezīme. Šeit jāaplūko atlikumi, kādi rodas, ja skaitļus daļa ar 3. Kvadrāts jāaizpilda ar visiem skaitļiem, kuri dod atlikumu 1, vai arī visiem tādiem skaitļiem, kuri dod atlikumu 2.

6. Vai vari kvadrātā 4×4 ierakstīt dažādus naturālus skaitļus, kuri nedalās ar 7, bet lai to summa katrā rindā, katrā kolonā un uz diagonālēm dalās ar 7?

Risinājums. Uzdevums ir iepriekšējā uzdevuma vispārīgāks variants, jāapskata četru skaitļu atlikumi. Derīgās atlikuma skaitļu kombinācijas ir (1; 1; 1; 4), (1; 1; 2; 3) un (1; 2; 2; 2). Vispirms kvadrātā var izvietot skaitļus no 1 līdz 4, lai skaitļu summas visās rindā, kolonās un uz diagonālēm ir 7, piemēram:

1	1	2	3
3	2	1	1
2	2	2	1
1	2	2	2

Tad skaitļus var palielināt par $7n$, lai visi skaitļi būtu dažādi, piemēram:

1	8	9	3
10	16	15	22
23	30	37	29
36	44	51	58

7. ²Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Parādīt, ka tā rūtiņās var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā -- citu skaitli) tā, lai nekādās divās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu summa nepārsniegtu

² 7., 8., un 9. uzdevumi ir ņemti no Atklāto Matemātikas olimpiāžu iepriekšējo gadu materiāliem

19. Vai var panākt, lai neviena no šīm summām nepārsniegtu 18? (Rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

Piezīme. Uzdevumu labi sākt ar lielāko skaitļu aplūkošanu – kādus skaitļus var rakstīt blakus skaitlim 16, kādus skaitlim 15. Skaitlim 16 var rakstīt blakus rūtiņās skaitļus 1; 2; 3, bet skaitlim 15 - 1; 2; 3; 4. Ir izdevīgi kvadrāta aizpildīšanu sākt no vienas malas, ierakstot tur skaitļus 16 un 15 ar atstarpī viena vai 2 rūtiņas. Lai skaitļu summas nepārsniegtu 18, skaitlis 16 ir jāraksta stūrī, bet skaitlim 15 tad “nepietiek” vēlamo kaimiņu, vai mēs 15 rakstītu pie malas (tam būtu viens kopīgs kaimiņš ar 16) vai vidū, kur nepieciešami 4 derīgi kaimiņi (bet skaitlim 15 to ir tikai 3 – 1; 2; un 3).

8. *Ieraksti zīmējumā e) parādītās tabulas 9 rūtiņās pa veseram pozitīvam skaitlim (daži no tiem var būt arī vienādi; 16 rūtiņas paliek tukšas) tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu tāda, kāda pierakstīta tabulā pie attiecīgās rindiņas vai kolonnas. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

	3	7	4	5	7
1					
4					
2					
4					
15					

e)

Piezīme. Uzdevumu var risināt, iesākumā tabulā ierakstot lielāku vai mazāku skaitļu skaitu, lai rindās un kolonnās būtu norādītās skaitļu summas, pēc tam rezultātu var optimizēt. Apvienojot vai sadalot skaitļus vairākos saskaitāmos.

9. *Kvadrātā, kas sastāv no 4 x 4 rūtiņām, ierakstīti visi naturālie skaitļi no 5 līdz 20 (skat. f) zīmējumu, kur vienādi cipari aizstāti ar vienādiem burtiem, bet dažādi - ar dažādiem). Bez tam visās rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir savā starpā vienādas. Kurš cipars ar kuru burtu aizstāts?

ZK	B	ZF	ZZ
G	ND	C	ZA
ZB	K	ZC	ZN
ZD	ZG	F	ZE

f)

Piezīme. Dotais uzdevums ir rēbuss, kur, pirmkārt, jāievēro skaitļu decimālā pieraksta īpašības. Viegli ir noteikt skaitļu 10, 11, 12 un 20 atrašanās vietu. Tad, aprēķinot, kāda ir skaitļu summa katrā rindā, var turpināt pārējo skaitļu atšifrēšanu.