

„Profesora Cipariņa kluba” 2016./2017. mācību gada  
5. nodarbība. **Uzdevumu īsi atrisinājumi.**

## 1. Faido

Deviņos no rīta māsas Dēkla un Mētra izgāja no mājām un devās skolas virzienā. Dēkla gāja ar ātrumu – 4 km/h, bet Mētra – 3 km/h. Deviņos piecpadsmit viņu suns Faido, sapratis, ka meitenes jau aizgājušas, steigšus devās tām pakaļ ar ātrumu 6 km/h. Vispirms Faido apsveicinājās ar Mētru un steidzās satikt Dēklu. Saticis Dēklu, Faido steidzās atpakaļ pie Mētras. Cikos Faido satika Mētru, skrienot atpakaļ uz mājām?

*Piezīme. Tiek pieņemts, ka pirmo reizi satiekot un apsveicinoties ar Mētru un Dēklu Faido nepatērē laiku. Gan māsas, gan Faido pārvietojas ar nemainīgu ātrumu.*

### **Atrisinājums**

Risināsim šo uzdevumu, apskatot, cik tālu no mājām katrā laika brīdī atrodas Dēkla, Mētra un Faido. Deviņos no rīta viņu attālums no mājām ir 0 km.

- 9:15
  - Faido atrodas 0 km no mājām, jo viņš vēl nav sācis skriet;
  - Dēkla atrodas  $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$  km attālumā no mājām, jo viņa gāja ar ātrumu 4 km/h 15 minūtes, kas ir  $\frac{1}{4}$  stundas;
  - Mētra atrodas  $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$  km attālumā no mājām, jo viņa gāja ar ātrumu 3 km/h 15 minūtes, kas ir  $\frac{1}{4}$  stundas.

9:15 Faido sāk skriet pie Dēklas līdz viņu satiek. Dēkla iet ar ātrumu 4 km/h un Faido skrien ar ātrumu 6 km/h vienā virzienā, tātad Faido tuvojas Dēklai ar ātrumu  $6 - 4 = 2$  km/h. Tā kā Dēkla atrodas 1 km attālumā no Faido, tad Faido panāk Dēklu pēc  $1:2 = \frac{1}{2}$  h. Satikšanās notiek 9:45 (9:15 +  $\frac{1}{2}$  h).

- 9:45
  - Faido atrodas  $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$  km attālumā no mājām, jo viņš skrēja ar ātrumu 6 km/h 30 minūtes, kas ir  $\frac{1}{2}$  stundas;
  - Dēkla atrodas  $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$  km attālumā no mājām, jo viņa gāja ar ātrumu 4 km/h 45 minūtes, kas ir  $\frac{3}{4}$  stundas;
  - Mētra atrodas  $\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$  km attālumā no mājām, jo viņa gāja ar ātrumu 3 km/h 45 minūtes, kas ir  $\frac{3}{4}$  stundas.

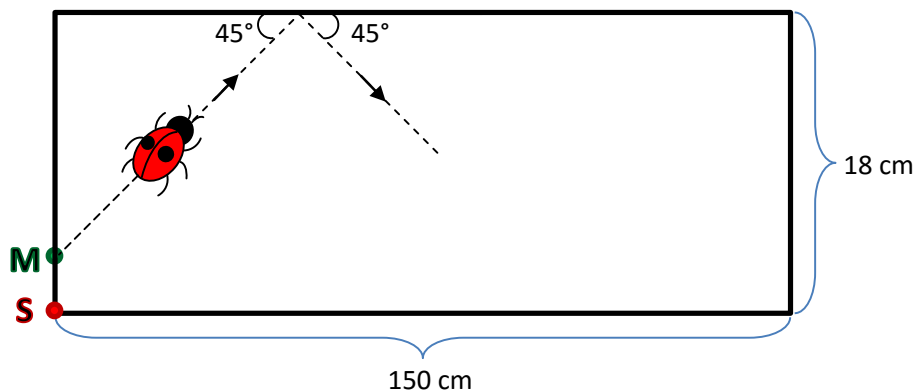
9:45 Faido sāk skriet pie Mētras. Tā kā Mētra iet ar ātrumu 3 km/h un Faido skrien ar ātrumu 6 km/h pretējā virzienā, tad Mētra un Faido tuvojas viens otram ar ātrumu  $3 + 6 = 9$  km/h. Tā kā attālums starp Faido un Mētru ir  $3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$  km, tad Faido pēc  $\frac{3}{4}:9 = \frac{1}{12}$  h = 5 min satiks Mētru.

Tātad Faido satiks Mētru, skrienot atpakaļ uz mājām, plkst. **9:50** (9:45 + 5 min).

## 2. Apmaldījies Latvijas nacionālais kukainis

Divpunktu mārīte atrodas uz garena galda, kura virsmas izmēri ir 18 cm × 150 cm. Mārīte pārvietojas tā, ka tās ceļš veido lauztu līniju, kas ar galda virsmas malām veido 45° leņķi (skat. 1. att.). Mārīte sāka ceļu punktā M, kas atzīmēts uz vienas no galda īsākajām malām. Pirmo reizi, kad mārīte sasniedz pretējo malu (otru īso malu), tā nonāk šīs malas viduspunktā. Kādā attālumā no punkta M atrodas tam tuvākais galda stūris S?

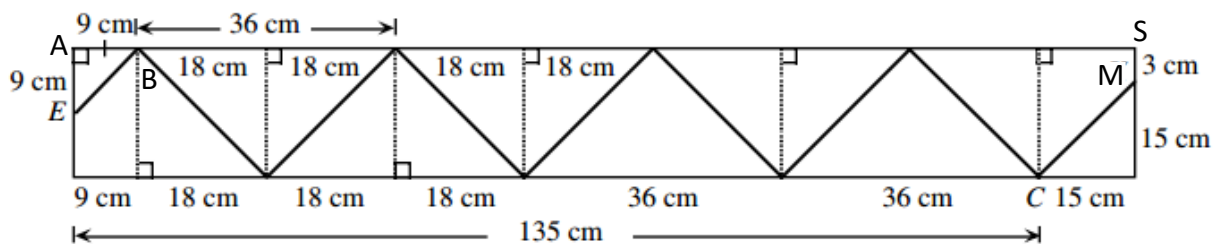
„Profesora Cipariņa kluba” 2016./2017. mācību gada  
5. nodarbība. Uzdevumu īsi atrisinājumi.



1. att.

**Atrisinājums**

Ja tiktu uzņemta filma par mārītes ceļu pa galdu un tad atskaņota pretējā virzienā, mārīte uzsāktu ceļu no punkta E un pabeigtu punktā M (skat. 2. att.). Tā kā mārīte sāk ceļu punktā E, kas atrodas  $18 : 2 = 9$  cm attālumā no galda stūra, tad pirmā ceļa daļa būtu no punkta E uz punktu B. Trijstūris  $\triangle ABE$  ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris. Tātad  $AE = AB = 9$  cm. Tad mārīte turpina ceļu, kā parādīts 2. attēlā, līdz viņa sasniedz punktu C. Šajā brīdī mārīte ir nogājusi  $9 + 18 + 3 \cdot 36 = 135$  cm galda garuma virzienā. Lai sasniegtu punktu M, mārītei ir jānoiet  $150 - 135 = 15$  cm galda garuma virzienā, tātad arī platuma virzienā. Tātad punkts M atrodas  $18 - 15 = 3$  cm attālumā no tam tuvākā galda stūra S.



2. att.

**3. Starpbrīdis**

Pēc atgriešanās no skolēnu brīvdienām Juris un Andris sajuta vajadzību atrisināt kādu interesantu matemātikas uzdevumu. Tā nu pusdienu starpbrīdī viņi ķērās klāt šādam uzdevumam:

Skaitļiem  $a, b, c, x, y$  un  $z$  izpildās vienādības:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ un } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0.$$

Pierādīt, ka  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Atrisini arī Tu šo uzdevumu!

**Atrisinājums**

Ieviesīsim apzīmējumus:  $\beta = \frac{x}{a}, \delta = \frac{y}{b}, \varepsilon = \frac{z}{c}$ . Tātad  $\beta + \delta + \varepsilon = 1$  un  $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} = 0$ .

Kāpināsim pirmās vienādības abas puses kvadrātā:

$$(\beta + \delta + \varepsilon)^2 = 1^2$$

$$\beta^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + 2(\beta\delta + \beta\varepsilon + \delta\varepsilon) = 1$$

„Profesora Cipariņa kluba” 2016./2017. mācību gada  
5. nodarbība. **Uzdevumu īsi atrisinājumi.**

levērojam, ka

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\beta\delta + \beta\varepsilon + \delta\varepsilon}{\beta\delta\varepsilon} = 0 \Rightarrow \beta\delta + \beta\varepsilon + \delta\varepsilon = 0$$

ievietojam to iepriekš iegūtajā izteiksmē un iegūstam prasīto:

$$\beta^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + 2(\beta\delta + \beta\varepsilon + \delta\varepsilon) = \beta^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + 2 \cdot 0 = \beta^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 = 1.$$

#### 4. Votivapas un šilišallas

Kādā nelielā rūķīšu ciematā dzīvo divas rūķīšu ciltis – votivapas un šilišallas. Zināms, ka votivapas vienmēr melo, bet šilišallas vienmēr saka patiesību. Kādu dienu šilišallu Patiesi atbrauca apciemot viņa draugs šilišalla Gudrinieks no blakus ciema. Tā sagadījās, ka tieši tajā laikā notika ciemata sapulce un ap apaļu galdu bija sasēdušies seši rūķīši, tajā skaitā Gudrinieka draugs Patiesis.

Gudrinieks jautāja: “Cik no jums ir šilišallas?”

“Pajautā katram no mums vienu jautājumu un noskaidro pats!” ierosināja viens no rūķīšiem.

“Labi. Sakiet man, kas ir jūsu blakussēdētāji?” prasīja Gudrinieks.

Visi rūķīši uz šo jautājumu atbildēja vienādi.

“Ar šo informāciju man nepietiek!” teica Gudrinieks.

“Es esmu visvecākais rūķītis no mums!” sacīja viens no rūķīšiem.

“Jā, viņš ir visvecākais!” piekrita viņa blakussēdētājs.

Tagad Gudrinieks zināja, cik šilišallu sēž pie galda.

Kādu skaitu viņš ieguva?

#### **Atrisinājums**

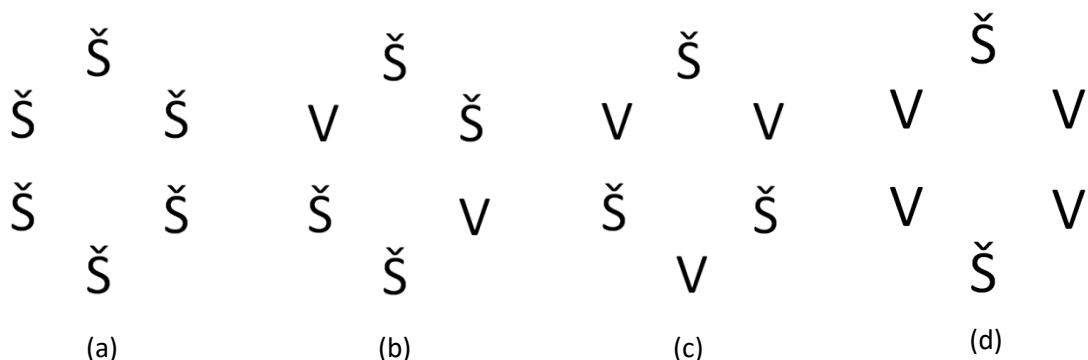
Atbilde: 2 šilišallas.

Risinājums. Apskatīsim visus iespējamus gadījumus.

- Ja visi teiktu, ka „Abi mani kaimiņi ir šilišallas!”, tad Gudrinieks uzreiz varētu pateikt, ka visi rūķīši, kas sēž ap galdu, ir šilišallas un viņam nevajadzētu papildus informāciju. Tik tiešām, tā kā Gudrinieka paziņa Patiesis ir šilišalla, un viņš teica taisnību, tad arī viņa kaimiņi ir šilišallas, kas teica taisnību, un šo šilišallu kaimiņi arī ir šilišallas, kas teica taisnību utt. Tātad visi ap galdu sēdošie būtu šilišallas (skat. 3. att. (a)).
- Ja visi teiktu, ka „Mani kaimiņi ir šilišalla un votivapa!”, arī tad Gudrinieks uzreiz zinātu, cik šilišallu sēž ap galdu. Patiesis teiktu patiesību, tātad viņam blakus sēdētu viens votivapa un viena šilišalla. Šilišalla, kas sēž blakus Patiesim arī teiktu patiesību, tātad viņam otrā pusē noteikti sēdētu votivapa. Votivapas melotu, tāpēc viņiem abās pusēs noteikti jābūt šilišallām. Tā turpinot ir skaidrs, ka ap galdu sēž 4 šilišallas un 2 votivapas – 2 pāri pa divām šilišallām, kas sēž blakus, un divi votivapas starp šiem pāriem (skat. 3. att. (b)).
- Tātad visi teica: „Abi mani kaimiņi ir votivapas!”. Šajā gadījumā ir iespējami divi varianti.
  - Ja šilišallas un votivapas sēž pamīšus – kopā ir 3 votivapas un 3 šilišallas (skat. 3. att. (c)).
  - Ja abi šilišallas kaimiņi ir votivapas un katras votivapas viens kaimiņš ir šilišalla, bet otrs – votivapa. Tad ap galdu sēž 2 šilišallas un 4 votivapas (skat. 3. att. (d)).

Šajā gadījumā Gudrinieks tiešām nevar uzreiz zināt, cik šilišallas piedalās sapulcē, tāpēc viņš saka, ka “Ar šo informāciju man nepietiek!”. Pēc tam, kad divi rūķīši, kas sēž blakus viens otram, piekrita, par to, ka viens no viņiem ir vecākais rūķītis, ir skaidrs, ka abi rūķīši ir no vienas cilts. Ja tā būtu taisnība, tad blakus sēdētu divi šilišallas, bet, ja tie būtu meli, – divi votivapas. Gudrinieks

saprata, ka abi rūķīši melo, jo tikai otrajā gadījumā blakus sēž 2 rūķīši no vienas cilts. Tātad sapulcē piedalījās 2 šilišallas.



3. att. Ar Š apzīmētas šilišallas, ar V – votivapas

## 5. Ieslodzītās peles

Kaķis Miķelis ir noķēris 21 peli un ielicis katru no tām atsevišķā kastē. Ik pēc kāda laiciņa Miķelis nejaušā secībā pa vienai paņem kādu peli un ieliek to telpā ar diviem slēdžiem (A un B). Var atšķirt, kad slēdzis ir ieslēgts un kad izslēgts, bet nav zināms, kādā pozīcijā tie bija sākumā. Katru reizi, atrodoties telpā ar slēdžiem, pelei noteikti ir jāizmaina tieši viena slēdža stāvoklis (no ieslēgta uz izslēgtu, vai no izslēgta uz ieslēgtu).

Jebkurā brīdī kāda no pelēm drīkst teikt, ka tās visas ir bijušas telpā ar slēdžiem. Ja pele saka taisnību un katra no 21 pelēm ir bijusi telpā ar slēdžiem, Miķelis tās palaidīs brīvībā. Bet, ja kaut viena no pelēm tomēr nav bijusi telpā ar slēdžiem, Miķelis tās visas apēdīs.

Pirms peles tika ievietotas 21 atsevišķā kastē, tās varēja kopīgi apspriesties par stratēģiju, kā uzvarēt Miķeli šajā spēlē un tikt brīvībā. Bet pēc spēles sākuma peles savstarpēji vairs nevar sazināties.

Kā pelēm jārikojas, lai nonāktu brīvībā?

*Piezīme. Miķelis ņem peles nejaušā secībā, bet katra no pelēm ik pēc kāda laika atkal nonāk telpā ar slēdžiem.*

### Atrisinājums

Pirms spēles sākuma peles izraudzījās vienu galveno peli. Galvenās peles uzdevums ir saskaitīt, cik peles ir bijušas telpā un paziņot to Miķelim.

Noteikumi, kas jāievēro visām pelēm, kas nav galvenā pele, ieejot telpā ar slēdžiem:

- ja A slēdzis ir ieslēgts, tad tām jāpārslēdz B slēdzis;
- ja A slēdzis ir izslēgts, tad tām ir jāieslēdz A slēdzis;
- ja A slēdzis ir izslēgts, un tās jau divas reizes pirms tam ir ieslēgušas A slēdzi, tad tām jāpārslēdz B slēdzis.

Noteikumi, kas jāievēro galvenajai pelei:

- ja A slēdzis ir ieslēgts, tad tas ir jāizslēdz un jāpieskaita 1 peļu skaitam;
- ja A slēdzis ir izslēgts, tad jāpārslēdz B slēdzis.

Brīdī, kad galvenā pele būs saskaitījusi 40, visas peles vismaz vienu reizi būs bijušas telpā ar slēdžiem, un viņas tiks brīvībā. Gadījumā, ja sākumā A slēdzis bija izslēgts, tad brīdī, kad galvenā pele aizskaitīs līdz 40, visas peles telpā ar slēdžiem būs bijušas vismaz divreiz. Bet gadījumā, ja sākumā A slēdzis bija ieslēgts, tad 19 peles telpā ar slēdžiem būs bijušas vismaz 2 reizes, bet 1 pele vismaz 1 reizi.