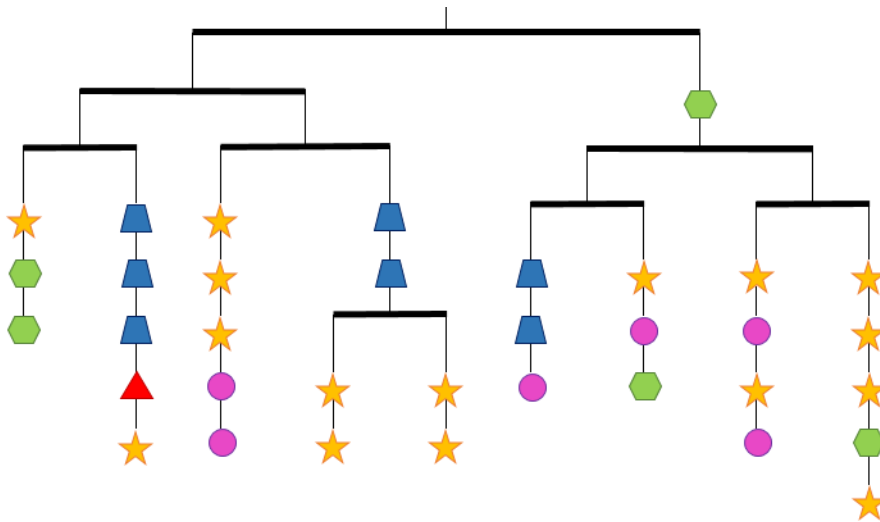


**Jauno matemātiķu konkurss
2016./2017. mācību gads**

5. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Kareklis

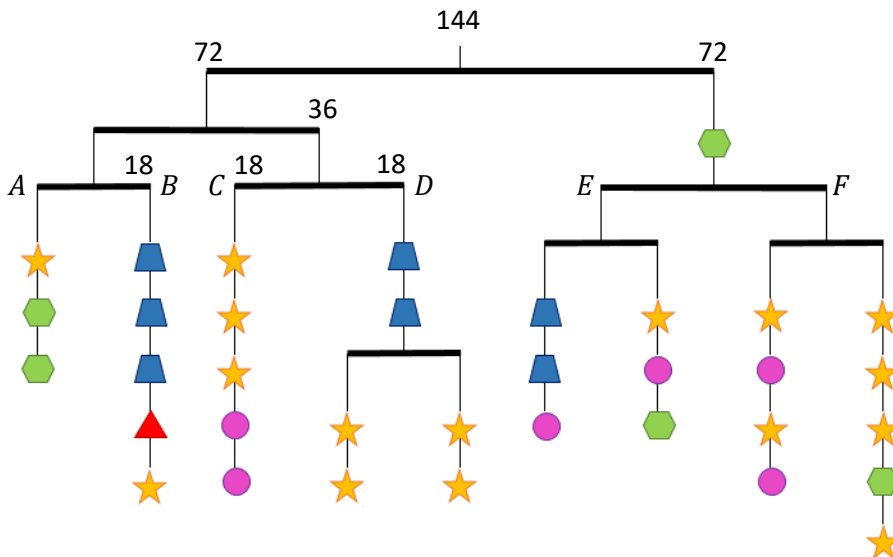
Nellijai uzdāvināja tādu karekli, kā redzams 1. att. Zināms, ka visas vienādās figūriņas sver vienādi un visi horizontālie stieņi ir līdzsvarā. Cik sver katra figūriņa, ja visas figūriņas kopā sver 144 gramus?



1. att.

Atrisinājums

Tā kā visi horizontālie stieņi ir līdzsvarā, tad varam noteikt, kāda ir kopējā masa figūriņām, kas iekarinātas to galos (skat. A1. att.).



A1. att.






Apzīmējam zvaigznītes masu gramos ar z , sešstūra – ar s , četrstūra – ar c , riņķa – ar r un trijstūra – ar t . Tā kā stieņa gali E un F ir līdzsvarā, tad

$$2c + 2r + z + s = 2r + s + 6z;$$

$$2c = 5z.$$

(1)

Tad stieņa galā D iekarināto figūriņu kopējā masa ir $2c + 4z = 18$ jeb $5z + 4z = 18$, no kā iegūstam, ka $z = 2$. Tad no (1) iegūstam, ka $c = 5$. Stieņa galā C iekarināto figūriņu kopējā masa ir $3z + 2r = 18$ jeb $6 + 2r = 18$, no kā iegūstam $r = 6$. Stieņa galā A iekarināto figūriņu kopējā masa ir $z + 2s = 18$ jeb $2 + 2s = 18$, no kā izriet $s = 8$. Stieņa galā B iekarināto figūriņu kopējā masa ir $3c + t + z = 18$ jeb $15 + t + 2 = 18$, tātad $t = 1$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka katras figūriņas masa gramos ir tāda, kā dots tabulā.

Figūriņa					
Masa gramos	2	8	5	6	1

2. Izdomā likumu!

Dota skaitļu virkne 89, 98, 106, 112, 114, Izdomā vienotu likumu, pēc kura iegūst katru nākamo skaitli virknē! Vai šajā virknē var parādīties skaitlis, kura pēdējais cipars ir nulle?

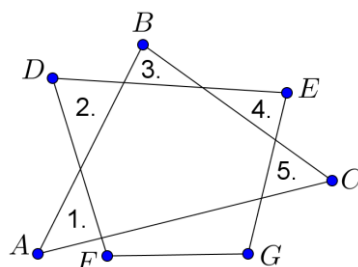
Atrisinājums

Dotajā virknē katru nākamo locekli iegūst, iepriekšējam virknes loceklim pieskaitot tā pēdējo ciparu.

Pamatosim, ka šajā virknē nevar parādīties skaitlis, kura pēdējais cipars ir 0. Tā kā katra nākamā virknes locekļa pēdējo ciparu ietekmē tikai iepriekšējā virknes locekļa pēdējais cipars, tad apskatām virkni, ko veido dotās virknes locekļu pēdējie cipari: 9, **8**, 6, 2, 4, **8**, 6, 2, 4, ... Šajā virknē katrs nākamais virknes loceklis ir atkarīgs tikai no viena iepriekšējā, tas nozīmē, ka, līdzko parādās kāds šajā virknē jau iepriekš bijis skaitlis, virknes locekļi sāk periodiski atkārtoties. Tas nozīmē, ka dotajā virknē nevar parādīties skaitlis, kura pēdējais cipars ir 0.

3. Skaitām trijstūrus!

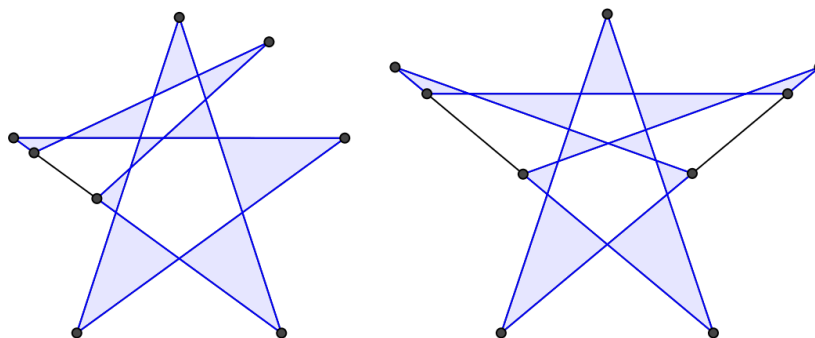
Vai var uzzīmēt 7 nogriežņus tā, lai izveidotos **a)** 10 trijstūri; **b)** 11 trijstūri? Aplūkojam tikai tādus trijstūrus, kurus uzzīmētie nogriežņi nesadala, skat., piemēram, 2. att., kurā izveidojušies 5 trijstūri.



2. att.

Atrisinājums

Gan a), gan b) gadījumā prasītais ir iespējams, skat. A2. att.



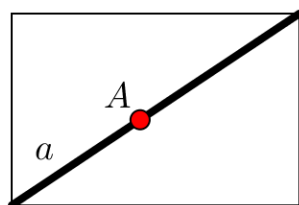
A2. att.

4. Izkrāso lapu!

Izkrāso lapu tieši trīs krāsās tā, lai uz katras taisnes, ko šajā lapā var novilk, būtu ne vairāk kā divas krāsas!

Atrisinājums

Piemēram, lapā vienu taisni a nokrāsojam melnu, vienu punktu A uz tās nokrāsojam sarkanu, bet pārējo lapu atstājam baltu (skat. A3. att.).



A3. att.

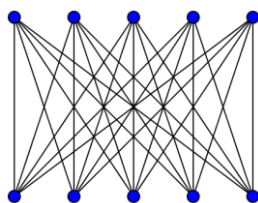
Lai kāda taisne šajā plaknē būtu nokrāsota vairāk nekā divās krāsās, tai būtu jākrusto taisne a gan punktā A , gan vēl kādā citā punktā. Taču, ja divas taisnes krustojas, tās var krustoties tikai vienā punktā; ja divām taisnēm ir vismaz divi kopīgi punkti, tad tās sakrīt, tas ir, ir viena un tā pati taisne. Tātad tāds gadījums, ka kāda taisne šajā lapā būtu nokrāsota trīs dažādās krāsās, nav iespējams.

5. Vecmāmiņas tirgū

Tirgū satikās dažas vecmāmiņas. Zināms, ka katra no vecmāmiņām pazīst tieši piecas citas no šīm vecmāmiņām (visas pazīšanās ir abpusējas). Starp jebkurām trīs no šīm vecmāmiņām ir vismaz divas, kas savā starpā nav pazīstamas. Kāds ir mazākais skaits vecmāmiņu, kas varēja satikties tirgū?

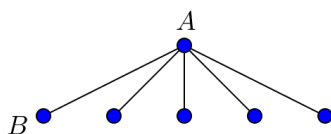
Atrisinājums

Mazākais iespējamais vecmāmiņu skaits ir desmit, skat. A4. att., kurā ar punktiem apzīmētas vecmāmiņas, un divi punkti ir savienoti ar nogriezni tad un tikai tad, ja tiem atbilstošās vecmāmiņas viena otru pazīst. Dotajā piemērā vecmāmiņas sadalītas divās grupās pa piecām vecmāmiņām tā, ka katra pirmās grupas vecmāmiņa pazīst visas otrās grupas vecmāmiņas, bet nepazīst nevienu savas grupas vecmāmiņu. Tā kā starp jebkurām trīs vecmāmiņām vismaz divas atrodas vienā grupā, tad tās savā starpā nav pazīstamas un uzdevuma nosacījumi izpildās.



A4. att.

Pierādīsim, ka mazāks skaits vecmāmiņu tirgū satikties nevarēja. Apskatām vecmāmiņu A (skat. A5. att.). Uzdevumā dots, ka šī vecmāmiņa pazīst tieši 5 citas vecmāmiņas. Apskatām vecmāmiņu B (skat. A5. att.). Tā kā starp jebkurām trīs vecmāmiņām ir vismaz divas, kas savā starpā nav pazīstamas, tad vecmāmiņa B nevar būt pazīstama ne ar vienu citu vecmāmiņu, ko pazīst A , bet tādā gadījumā nepieciešamas vēl vismaz 4 citas vecmāmiņas, tas ir, kopā ir vismaz 10 vecmāmiņas.



A5. att.