PUNKTIŅŠ **Skaitļi, atkal skaitļi** Komentāri
21.04.2017

Nodarbības mērķis: gatavoties uz Atklāto Matemātikas Olimpiādi. Atkārtot veselo skaitļu dalāmības īpašības; aplūkot dažādas veselo skaitļu īpašības; lietot kombinatoriskas metodes.

Ar * apzīmēti grūtāki uzdevumi

1. Sareizināja visus skaitļus no 73 līdz 81. Nosaki, kādi ir šī reizinājuma 3 pēdējie cipari!

Komentārs. Pirmkārt – kādi skaitļi ietilpst dotajā intervālā? Otrkārt – kādi ir šo skaitļu pēdējie cipari? Treškārt – kuri cipari šajā virknē ir nozīmīgākie? (0; 2; 5) *Atbilde:* pēdējie cipari ir 000. Pamato!

2. Trīsciparu skaitļa ciparus samainīja vietām un abus skaitļus saskaitīja. Vai var gadīties, ka summa ir 999? Vai to var izdarīt ar četrciparu skaitli, iegūt 9999?

Piezīme. Jāievēro, ka trīsciparu skaitlī ir vismaz divi vienādās paritātes cipari, tāpēc abus skaitļus saskaitot, radīsies vismaz viens pāra skaitļa cipars.

3. Cik ciparu ir skaitlim 1+2+3+4+...+999+1000?

Komentārs. Šis ir atkārtojuma uzdevums – kāda ir racionāla skaitīšanas metode? Racionāla skaitļu saskaitīšanas metode ir noderīga dažādu uzdevumu risināšanā.

Sadala skaitļus pāros ar vienādu summu un nosaka pāru skaitu. Aprēķina doto skaitļu kopējo summu.

Atbilde: 6 cipari.

4. Cik ir trīsciparu skaitļu, kuri dalās ar 3?

Piezīme. Atkārtot naturālo skaitļu virknes īpašības – šeit: katrs trešais skaitlis dalās ar 3.

Risinājums. Iedomāsimies, ka visus naturālos skaitļus no 1 līdz 999 pēc kārtas sadalīsim grupās pa trīs – (1, 2, 3), (4, 5, 6), …., (997, 998, 999). Katrā grupā tieši viens skaitlis dalās ar 3. Cik ir tādu grupu? 999 : 3 = 333. Grupu skaits, kuras satur skaitļus mazākus par 100 - no (1, 2, 3) līdz (97, 98, 99) ir 33. Tāpēc trīsciparu skaitļu skaits, kuri dalās ar 3, ir 333 – 33 = 300.

Komentārs. Uzdevumu var risināt arī savādāk. Trīsciparu skaitļu skaits ir 999 – 100 + 1 = 900. 900 skaitļus var sadalīt 300 grupās, kur katrā grupā ir 3 skaitļi. *Atbilde*: 300 skaitļi.

Papildus pētījumam: ko var teikt par sekojošu naturālo skaitļu virkni, kuras locekļu skaits nedalās ar 3? Piemēram, ja ir doti kaut kādi 16 vai 17 viens otram sekojoši naturāli skaitļi? Vai šāda virkne noteikti saturēs 5 skaitļus, kuri dalās ar 3?

5. Ko vari pateikt par skaitļiem 111, 1111, 11111, 111111?

Piezīme. Jāpielieto skaitļu dalāmības ar 3 un 11 īpašības, sarežģītāk ir ar skaitli 11111. Jāievēro, kādu divu viencipara skaitļu reizinājums beidzas ar 1 – 1 x 1; 3 x 7; 9 x 9. Visvienkāršākā metode ir pārbaudīt pēc kārtas tos pirmskaitļus, kuri beidzas ar 1, 3, 7, 9. *Atbilde*: 11111 = 41 x 271

6. *Naturāls skaitlis n satur tikai ciparus 0, 1, 2, un turklāt vieninieku skaitļa pierakstā ir par 1 vairāk nekā divnieku. Pierādi, ka $n + 471$ nedalās ar 3!

Atrisinājums. Skaitlis 471 dalās ar 3. Ja skaitlis $n + 471$ dalītos ar 3, tad arī skaitlis n dalītos ar 3. Ja skaitļa n pierakstā ir tikai viens cipars 1 un cipara 2 nav, tad šis skaitlis ir 10^k un ar 3 nedalās. Ja skaitļa pierakstā ir kaut viens cipars 2, tad, saskaņā ar doto, skaitļa ciparu summa ir $2k + 1k + 1 = (2 + 1)k + 1 = 3k + 1$. Tātad ciparu summa nedalās ar 3 un ievērojot dalāmības īpašības arī skaitlis n nedalās ar 3. Līdz ar to $n + 471$ nedalās ar 3.

7. Kāds ir lielākais skaitļu skaits, kuri dalās ar 3 un kuri sastādīti, izmantojot divus visu 10 ciparu komplektus, tas ir, var būt ne vairāk kā tikai divi skaitļi, kuri satur vienu un to pašu ciparu.

Komentārs. Uzdevumam var būt dažādi atrisinājumi. Te loģiski jāizdomā, ka skaitļu skaits būs vislielākais, ja izvēlēsimies viencipara skaitļus, kā arī izveidosim divcipara skaitļus – pēc iespējas tādus skaitļus, kuri satur nelielu skaitu ciparu. Laba tēma ir apspriest, ko darīt ar ciparu 0. To, protams, izdevīgi izvēlēties kā atsevišķu skaitli, jo nulle dalās ar jebkuru veselu (protams, ne tikai!) skaitli. *Atbilde*: var izveidot 14 skaitļus (kādus?)

8. *Vai var atrast 6 pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, kuru ciparu summa nedalās ar 4? Vai var atrast tādus 7 skaitļus?

Komentārs. Tradicionāls olimpiāžu uzdevums. a) variants – jāuzraksta piemērs, kas varētu būt sekojošs: 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002. Kā tādu atrast? Eksperimentēt, atklāt likumsakarības, vispārināt. Piemēram, aplūkot ciparu summas visiem skaitļiem no 1 līdz 50; ievērot, ka pārejot uz jaunu desmitu intervālu, skaitļu ciparu summas $S(n)$ var nepieaugt par viens:

….. $S(16) = 7$; $S(17) = 8$; $S(18) = 9$; $S(19) = 10$; $S(20) = 2$; $S(21) = 3$, ….

Tāpēc vajag izpētīt, kas notiek skaitļa 100 apkārtnē, pēc tam – skaitļa 1000 apkārtnē.

b) variantā iepriekš atklātās īpašības vajag izanalizēt. Viena desmita intervālā skaitļi palielinās par 1 un to ciparu summas arī palielinās par 1, tas ir, ciparu summas veido secīgu skaitļu virkni. Secīgā naturālo skaitļu virknē katrs ceturtais skaitlis dalās ar 4. Tāpēc lielākais 3 skaitļi pēc kārtas nedalās ar 4. Aplūkojot jebkurus divus blakus esošus desmitu intervālus, katrā no tiem var būt ne vairāk kā 3 secīgi skaitļi, kuru ciparu summa nedalās ar 4. Ja pirmā desmitu intervāla pēdējie 3 skaitļi ir tādi, ka to ciparu summa nedalās ar 4, tad, pārejot uz nākamo desmitu intervālu, tā sākumā arī nevar būt vairāk kā 3 šādi skaitļi. Atbilde: 7 pēc kārtas ņemti skaitļi ar doto īpašību neeksistē.

9. *Rindā kaut kādā kārtībā jāizraksta naturālie skaitļi no 1 līdz 13, katrs tieši vienu reizi. Zināms, ka pirmajam skaitlim jābūt 13, otrajam jābūt 1, un katram skaitlim, sākot ar otro, jābūt visu pirms tam uzrakstīto skaitļu summas dalītājam. Kuru skaitli var rakstīt kā trešo?

Piezīme. Šis ir labs mājas darba uzdevums, kura atrisināšanai ir vajadzīga vien pacietība un nedaudz atjautības.
Atrisinājums. Pirmo divu skaitļu summa ir 14. Trešais skaitlis var būt vai nu 2, vai 7. Visu doto skaitļu summa ir 91. Ja pēdējais skaitlis ir 2, tad visu pirmo 12 virknes skaitļu summa ir 89, kas ar 2 nedalās. Savukārt $91 - 7 = 84$ dalās ar 7. Tāpēc trešais skaitlis virknē ir 2.
Vai pietiek ar šādu atrisinājumu? Ja nu prasītā virkne nemaz neeksistē? To vajag pārbaudīt. Izmantojot kļūdu un mēģinājumu metodi, var sastādīt virkni:
13, 1, 2, 8, 6, 10, 4, 11, 5, 3, 9, 12, 7.