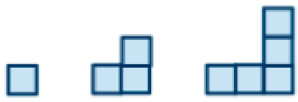
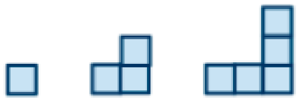
PUNKTIŅŠ Kāds būs nākamais? – Skaitļu virknes veidošana
13.10.2017

Nodarbības mērķis: atklāt procesu veidošanās sakarības un aprakstīt tās skaitliski, mēģināt izveidot formulu.

1. Zane zīmēja kvadrātiņus. Cik kvadrātiņu būs trešajā, ceturtajā, piektajā zīmējumā? Vai vari pateikt to bez zīmēšanas, cik kvadrātiņu būs 10-tajā zīmējumā?



Komentārs. Skolēniem jāievēro, ka katra nākamā figūra satur par 2 kvadrātiņiem vairāk. Pierakstām katrai figūrai kārtas numuru un atbilstošo kvadrātiņu skaitu:

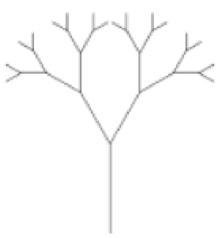


Kārtas numurs:	**1**	**2**	**3**	**4**	….
Kvadrātiņu skaits:	**1**	**3**	**6**	**10**	…

Ievērosim, ka apakšējā rindā ir kvadrātiņu skaits sakrīt ar figūras numuru. Augšējo kvadrātiņu skaits ir par 1 mazāks. Tāpēc 10-tajā figūrā būs 10 + 9 = 19 kvadrātiņi.
Vispārīga formula: $n + n - 1 = 2n - 1$. Ar tās palīdzību var aprēķināt jebkura izmēra šādas figūras kvadrātiņu skaitu.

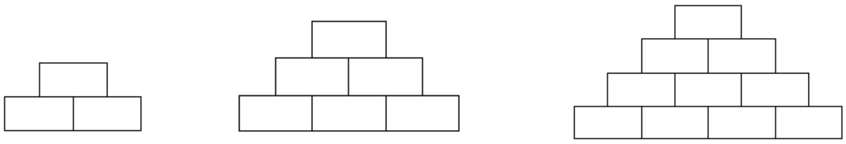
2. Ella iestādīja burvju zariņu. Jau pirmajā dienā zara galā izauga 3 jauni zari. Otrajā dienā atkal katra zara galā izauga 3 jauni zari. Tā katru dienu katra zara galā atkal izauga 3 jauni zari. Sestajā dienā zari vairs neauga, bet katra zara galā uzplauka sudraba lapiņa. Cik lapiņas uzplauka?

Komentārs. Jāsāk ar zīmēšanu – kā skolēni izprot doto situāciju, jāpārrunā, kas ir "zara gals". Kāds izskatīsies koks otrajā un trešajā dienā, cik tur būs zaru gali. Te piemērs, kāds koks izaug, ja katru dienu zara galā pieaug 2 jauni zari (cik dienu "vecs" ir zīmējumā dotais koks?):

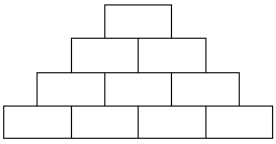


Atrisinājums. Katru dienu zaru skaits palielinās 3 reizes. Zari aug 5 dienas, tāpēc zaru galu skaits ir $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Tieši tik arī izaug sudraba lapiņas sestajā dienā.

3. Mazais Rūdis būvēja torņus no rotaļu klucīšiem. Cik klucīšu viņam nepieciešams, lai uzbūvētu šādu torni 6 līmeņu augstumā? Cik augstu šāda veida torni Rūdis var uzbūvēt no 30 klucīšiem? Cik klucīšu vajag, lai uzbūvētu visu torņus augstumā 1, 2, 3, 4, 5 un 6?



Atrisinājums. Jāievēro, ka, skaitot no augšas, katrā nākamajā līmenī klucīšu skaits par viens palielinās:



1
2
3
4

Tas nozīmē, ka katra šāda torņa klucīšu skaits ir visu naturālo skaitļu summa no 1 līdz *n*. Piemērā tā ir visu skaitļu summa no 1 līdz 4, tātad 10. Vispārīga klucīšu skaita aprēķināšanas formula ir:

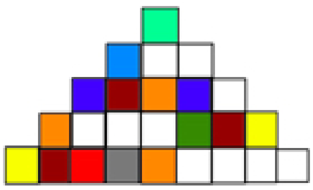
$$\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

Šī formula izriet no sekojošas metodes:

Kā vēsta nostāsts[1], kad Kārlis Gauss (1777 – 1855) bija skolnieks, skolotājs viņam uzdeva saskaitīt visus skaitļus no 1 līdz tūkstotim. Kārlis atbildi atrada pārsteidzoši ātri. Viņš sadalīja skaitļus pāros (1; 100), (2; 99), (3; 98), … . Katrā pāra summa ir viena un tā pati 101. Pāru skaits ir 50, kopējais rezultāts ir $101\cdot 50=5050$.

Tornim augstumā 6 nepieciešami $\frac{6\cdot 7}{2}=21$ klucīši. Lai vienlaikus uzbūvētu visus torņus augstumā no 1 līdz 6, nepieciešami $1+3+6+10+15+21=56$ klucīši.

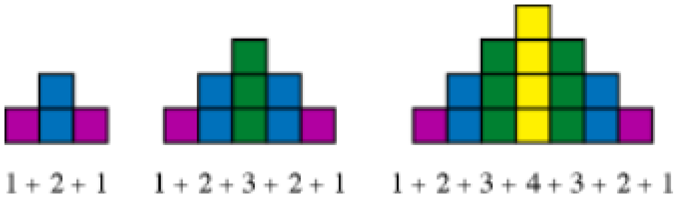
4. Jonasam ir citāds koka klucīšu komplekts un viņš būvē citādus torņus. Cik klucīši nepieciešami, lai uzbūvētu torni augstumā 1, torņus augstumā 2, 3, 4, 5, 6? Vai vari noteikt, kas tie ir par skaitļiem, kā tos sauc?



Komentārs. Uzdevums līdzīgs iepriekšējam uzdevumam, bet dota citāda konfigurācija – no kvadrātiņiem. Galvenais "noslēpums" te ir pierādījums bez vārdiem. Šī uzdevuma vizuāls atrisinājums atrodams zinātniskā raksta "An Invitation to Proofs Without Words" (Alsina, Nelsen, EUROPEAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS,Vol. 3, No. 1, 2010, 118-127)[2] 121. lappusē. Te atrodami arī citi algebriski uzdevumi un to skaisti vizuāli atrisinājumi.

[1] Plašāku materiālu var lasīt Kembridžas Universitātes mājas lapā NRICH: https://nrich.maths.org/2478
[2] https://www.google.lv/search?q=proofs+without+the+words+sum+of+even+numbers&ie=utf-8&oe=utf-8&client=firefox-b&gws_rd=cr&dcr=0&ei=zCPjWe7pIOfR6ATAp5nACw

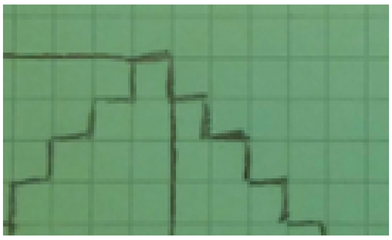
Atrisinājums. Kvadrātiņus var skaitīt pa stabiņiem:



Var summēšanu veikt arī citādi - skaitot kvadrātus katrā horizontālajā joslā, sākot no augšas. Dotajā piemērā (skat. augstāk) summē 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25. Kvadrātiņu skaits sakrīt ar figūras augstumu reizinātu pašu ar sevi (jeb augstuma kvadrātu). Vispārīga formula:

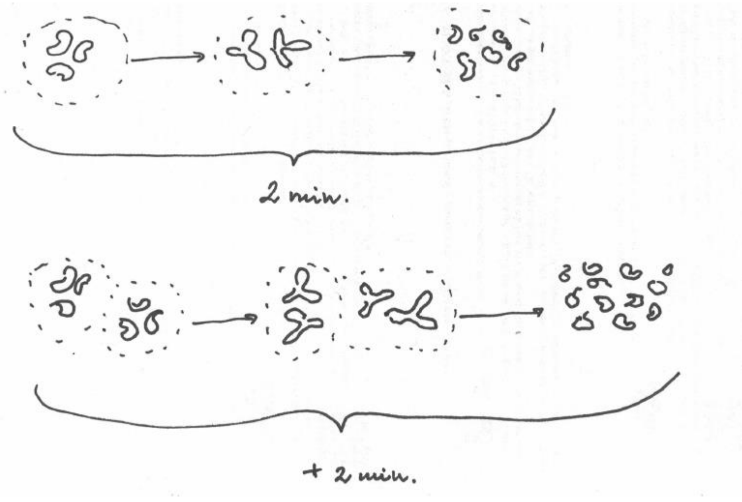
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

To var vizuāli pamatot, ja figūru sagriež divās daļās un mazāko daļu pārvieto tā, lai veidojas vesels kvadrāts:



5. Zinātnieks Asprātis atklājis jaunu baktēriju veidu. Ja satiekas 3 baktērijas, tad viena iet bojā, bet pārējās katra sadalās 3 jaunās baktērijās. Šāda 3 baktēriju pārveidošanās notiek 2 minūšu laikā. Tūlīt pat baktērijas atkal apvienojas grupās pa trīs. Asprātis ievietoja kolbā 3 baktērijas. Tikko baktēriju skaits pārsniedza 100, kolba uzsprāga. Pēc cik minūtēm tas notika?

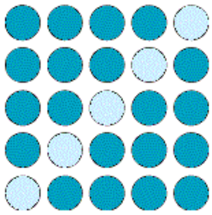
Komentārs. Ieteicams vispirms shematiski attēlot procesu, kā tas mainās 2 minūšu, pēc tam nākamo divu minūšu laikā, pat vēl ilgāk:



Divu minūšu laikā baktērijas kļūst 3 reizes vairāk, nekā bija. Sākumā bija 3 baktērijas, pēc divām minūtēm radās 6, tad 12, tad 24, 48, 96. Kopumā pagāja 10 minūtes. Nākamo 2 minūšu laikā kolba uzsprāga. (Jāievēro, ka katrā grupā viena baktērijas iet bojā.)

Skaitliski: $(3-1)\cdot 3=6;$ $(6-6/3)\cdot 3=12;$ $(12-12/3)\cdot 3=24;\ldots$

6. Lodītes tiek saliktas kvadrāta veidā, tad noņem tās lodītes, kuras atrodas uz diagonāles. Izpēti, cik lodītes atliek, ja izveido kvadrātiskas konfigurācijas 2 x 2; 3 x 3; 4 x 4, …. un no diagonāles noņem lodītes. Kas kopīgs šai skaitļu virknei? Kāda viena aritmētiska darbība ir kopīga šo skaitļu aprēķinā? Cik lodītes būs uz galda devītajā gadījumā?



Atrisinājums. Attēlā redzama konfigurācija 5 x 5 lodītes, kur noņemtas lodītes no diagonāles. Ja atlikušās lodītes izvieto kompakti – taisnstūra formā, tad lodīšu skaits ir $5\cdot 4$. Tāpēc vispārīgs šīs procedūras apraksts ir formā $n(n-1)$. Pirmajā konfigurācijā ir 2 lodītes, otrajā 6, trešajā 12, ceturtajā 20, tad 9-tajā konfigurācijā būs $9\cdot 10 = 90$ lodītes (jo devīto konfigurāciju veido no kvadrāta 10 x 10 lodītes, tad noņem tās, kuras ir uz diagonāles).