

PUNKTIŅŠ (B grupa) Uzdevumu "kokteilis"

6.10.2017

Īsi risinājumi un paskaidrojumi

1. Taisnstūris sastāv no 8 x 10 rūtiņām. Tajā jāizmitina 2 suņi, daži kaķi un daži jēri. Katram kaķim dzīvei vajag vienu rūtiņu. Katram sunim dzīvei vajag 2 x 2 rūtiņu kvadrātu. Katram jēram dzīvei vajag 10 rūtiņu lielu patvaļīgas formas apgabalu. Neviena suņa mītne ne ar malām, ne stūriem nedrīkst saskarties ne ar vienu jēra mītne. Kāds ir lielākais izvietojamais jēru daudzums?

Atrisinājums. Ja aplūkojam situāciju – taisnstūrī ir 80 rūtiņas, kur 8 no tām aizņem suņi. Atliek 72 rūtiņas, kurās teorētiski varētu izvietot 7 jērus. Taču suņu aploki nedrīkst saskarties ar jēru aplokiem. Tas nozīmē, ka starp suņu aizņemtiem kvadrātiem un jēru aplokiem ir jāizvieto kaķi kā aizsargjosla. Visekonomiskākais abu suņu izvietojums ir blakus taisnstūra 8 x 10 stūrī, tad aizsargjosla ir 7 rūtiņu gara. Tas nozīmē, ka atliek ne vairāk kā 65 rūtiņas jēru izvietošanai. Tāpēc lielākais var izvietot 6 jērus. To nav grūti konstruēt (2 suņi, 6 jēri un 12 kaķi).

2. Konstruē četras sešu rūtiņu figūras, kuras visas pieskaras viena otrai.

Piezīme. Viens no risinājumiem ir centrā izvietot taisnstūri 2 x 3 rūtiņas, kuru ietver trīs 6rūtiņu figūras, kuras savstarpēji saskaras.

3. Diviem divciparu skaitļiem $A = \overline{ab}$ un $B = \overline{cd}$ uzrakstīja skaitļus, kuros ir otrāda ciparu kārtība $U = \overline{ba}$ un $V = \overline{dc}$. Visi cipari a, b, c, d ir dažādi. Atrodi piemērus, kur skaitļu A un B summa ir mazāka nekā skaitļu U un V summa! Kādi var būt vislielākā ciparu a un c summa?

Atrisinājums. Piemērs: $A = 12, B = 37$, tad $U = 21$ un $V = 73$. $12+37 < 21 + 73$

Skaitļa A decimālais pieraksts ir $A = 10a + b$, līdzīgi $B = 10c + d$. Savukārt otrs skaitļu pāris $U = 10b + a$ un $V = 10d + c$. Pēc uzdevuma nosacījuma:

$$10a + b + 10c + d < 10b + a + 10d + c$$

Pārveidojot $9a + 9c < 9b + 9d$, jeb $a + c < b + d$

Vislielākās dažādu vienciparu skaitļu summas ir

$$9 + 8 = 17 \quad 9 + 5 = 14 \quad 8 + 7 = 15 \quad 7 + 6 = 13$$

$$9 + 7 = 16 \quad 9 + 4 = 13 \quad 8 + 6 = 14 \quad 7 + 5 = 12$$

$$9 + 6 = 15 \quad 8 + 5 = 13$$

No tā izriet, ka $a + c$ summa būs mazāka par 17 un arī par 16. Skaitļu $a + c$ summa nevar būt arī 15 (lielāku summu veido $9 + 7$ vai $9 + 8$, tad $a + c$ jābūt $7 + 8$, kas liecina ka kādu ciparu jāizmanto divas reizes). Tāpēc vislielākā $a + c$ summa var būt 14. Var būt vairāki atrisinājumi:

$$A = 97; B = 58$$

$$A = 98; B = 57$$

$$A = 89; B = 67$$

$$A = 87; B = 69$$

4. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis n ar īpašību: skaitļi n un $2n$ pa abiem satur katru ciparu tieši vienu reizi?

Atrisinājums. Atzīmēsim dažus faktus. Nulli var saturēt tikai skaitlis $2n$, un to iegūs, ja 5 reizinās ar 2. Novērtējam, ka abi skaitļi būs piecciparu skaitļi. Ja pieņemam, ka n ir 4-ciparu skaitlis, tad $2n$ nesatur vairāk kā 5 ciparus (ja vislielāko 4-ciparu skaitli 9999 reizina ar 2, tad iegūst 19998) Tāpat arī n nevar būt 6-ciparu skaitlis, jo $2n$ saturētu vairāk kā 4 ciparus. Mazākais 5-ciparu skaitlis, kas satur visus dažādus ciparus ir 12345 (jo 0 nesatur). Otrais cipars nevar būt 2, jo reizinot izvēlēto skaitli ar 2, desmittūkstošu cipars arī būs 2. Nākamais mazākais skaitlis sākas ar 13___. Tad $2n$ varētu sākties ar 26___ vai 27___. No tā seko, ka cipars 2 skaitlī n nav iekļauts. Seko $n = 134_5$. Cipars 5 nevar būt desmitu pozīcijā, jo vienu pozīcijā būs tāds skaitlis, kuru reizinot ar 2 veidosies pārnēsums (nebūs 0 otrajā skaitlī) (skaitļi, kuru reizinājums ar 2 neveido pārnēsumu – 1, 2, 3, 4 jau ir izvietoti citās pozīcijās). Skaitļa n desmitu cipars nevar būt 6, jo tad $2n$ desmitu cipars būs 3. Nevar būt arī 7. Der 8.

Mazākais skaitlis $n = 13485$, tad $2n = 26970$.

5. Autobuss sāka rīta reisu, tajā cilvēki iekāpa tikai nepāra pieturvietās, bet tikai pāra pieturvietās daži no pasažieriem izkāpa. Izbraucot no sestās pieturvietas izrādījās, ka katru ceļa posmu ir veicis citāds skaits pasažieru, kā arī iekāpjošo un izkāpjošo pasažieru skaits katrā pieturvietā ir bijis citāds. Atrodi mazāko iespējamo kopīgo pasažieru skaitu, ja nevienu reizi salons nebija tukšs. Kāda bija pasažieru iekāpšanas – izkāpšanas secība pieturvietās?

Atrisinājums. Vismazākais kopējais pasažieru skaits, kuri iekāpa un izkāpa pieturās būs visu dažādo skaitļu summa no 1 līdz 6, tas ir, 21. Ir 6 pieturas, vienā no pieturām iekāpj 6 pasažieri. Tas iespējams tikai pirmajā pieturā (ja autobusā jau ir kāds pasažieris tad + 6 nozīmē, ka kādu posmu brauks jau vairāk kā 6 pasažieri). Atgadījuma piemērs var būt sekojošais (aplīšos norādīts, cik pasažieri iekāpa vai izkāpa pieturā):

