PUNKTIŅŠ (B grupa) Atrodi likumsakarības!
13.10.2017

Īsi risinājumi un paskaidrojumi

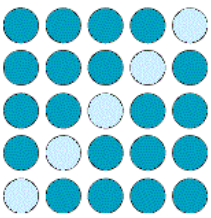
1. Ella iestādīja burvju zariņu. Jau pirmajā dienā zara galā izauga 3 jauni zari. Otrajā dienā atkal katra zara galā izauga 3 jauni zari. Tā turpinājās katru dienu. Devītajā dienā zari vairs neauga, bet katra zara galā uzplauka sudraba lapiņa. Cik lapiņas uzplauka?

Atrisinājums. Pirmajā dienā izauga 3 zari. Katru nākamo dienu zaru galu skaits trīskāršojas. Astoņas dienās izveidojās $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^8=6561$ zaru gali. Tikpat daudz devītajā dienā izauga sudraba lapiņas.

2. Pētnieks Asprātis atklājis jaunu baktēriju veidu. Ja satiekas 4 baktērijas, tad viena iet bojā, bet pārējās katra sadalās 4 jaunās baktērijās. Šādas pārmaiņas notiek 20 sekunžu laikā. Tūlīt pat visas baktērijas atkal apvienojas grupās pa četri. Pētnieks Asprātis ievietoja kolbā 8 baktērijas. Tikko baktēriju skaits pārsniedza 10 000, kolba uzsprāga. Pēc cik minūtēm tas notika?

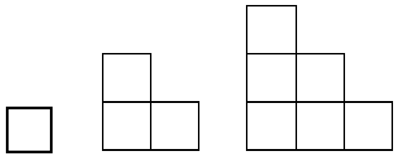
Atrisinājums. 8 baktērijas apvienojas divās grupās. Katrā grupā atliek 3 baktērijas, kuras katra dalās 4 daļās. 20 sekunžu laikā rodas 24 baktērijas. Tās apvienojas 6 grupās, no kurām nākamo 20 sekunžu laikā rodas kopumā $6\cdot3\cdot4=72$ jaunas baktērijas. Ja kolbā ir $3n$ baktērijas, tad 20 sekunžu laikā rodas $\frac{3n}{4}\cdot3\cdot4=9n$ jaunas baktērijas, tas ir, pēc katrām 20 sekundēm baktēriju skaits ir trīskāršojies. Vienkārši aprēķināt, ka 20 sekunžu periodā tūlīt pēc 2 minūtēm, notiek sprādziens.

3. Lodītes tiek saliktas kvadrāta veidā, tad noņem tās lodītes, kuras atrodas uz diagonāles. Izpēti, cik lodītes atliek, ja izveido kvadrātiskas konfigurācijas 2 x 2; 3 x 3; 4 x 4; … un noņem lodītes no diagonāles. Izveido atbilstošu skaitļu virkni. Kāda ir tās formula? Cik lodīšu ir 100-tajā konfigurācijā?



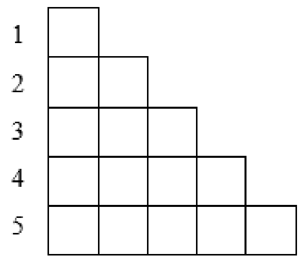
Atrisinājums. Attēlā redzama konfigurācija 5 x 5 lodītes, kur noņemtas lodītes no diagonāles. Ja atlikušās lodītes izvieto kompakti – taisnstūra formā, tad lodīšu skaits ir $5\cdot4$. Tāpēc vispārīgs šīs procedūras apraksts ir formā $n(n-1)$. Pirmajā konfigurācijā ir 2 lodītes, otrajā 6, trešajā 12, ceturtajā 20, tad 100-tajā konfigurācijā būs $100\cdot101=10100$ lodītes.

4. Māris būvēja torņus no rotaļu klucīšiem. Cik augstu šāda veida torni Māris var uzbūvēt, ja komplektā ir 50 klucīši? Cik klucīšu viņam nepieciešams, lai uzbūvētu šādu torni augstumā 10? Cik klucīšu vajag, lai vienlaikus uzbūvētu visus torņus augstumā 1, 2, 3, 4, 5 un 6?
Klucīši šķērsgriezumā:



Atrisinājums. Klucīšu skaits torņos secīgi ir 1; 3; 6; 10; 15; 21; …..

Kā veidojas šie skaitļi? Aplūkosim diagrammu:



Klucīšu skaits katrā rindā palielinās par 1. Klucīšu skaits dotajā piemērā ir visu naturālo skaitļu summa no 1 līdz 5. Vispārīga klucīšu skaita aprēķināšanas formula ir:

$$\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

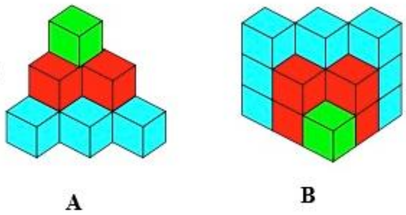
Šī formula izriet no sekojošas metodes:

Kā vēsta nostāsts[1], kad Kārlis Gauss (1777 – 1855) bija skolnieks, skolotājs viņam uzdeva saskaitīt visus skaitļus no 1 līdz tūkstotim. Kārlis atbildi atrada pārsteidzoši ātri. Viņš sadalīja skaitļus pāros (1; 100), (2; 99), (3; 98), … . Katrā pāra summa ir viena un tā pati 101. Pāru skaits ir 50, kopējais rezultāts ir $101\cdot 50=5050$.

Tornim augstumā 10 nepieciešami $\frac{10\cdot 11}{2}=55$ klucīši. Ja rotaļu komplektā ir 50 klucīši, tad augstākais tornis izveidojams no 45 klucīšiem augstumā 9. Lai vienlaikus uzbūvētu visus torņus augstumā no 1 līdz 6, nepieciešami $1+3+6+10+15+21=56$ klucīši, tātad ar dotā rotaļu klucīšu komplektu nepietiek.

[1] Plašāku materiālu var lasīt Kembridžas Universitātes mājas lapā NRICH: https://nrich.maths.org/2478

5. Johans no klucīšiem veidoja sarežģītākas konstrukcijas. Cik klucīšu nepieciešams, lai uzbūvētu konstrukciju A? Konstrukciju B?



a) Aplūko A konstrukciju. Cik klucīši nepieciešami, lai konstruētu mazākas un lielākas šādas konstrukcijas? Uzraksti atbilstošo skaitļu virkni! Cik klucīši nepieciešami, lai uzbūvētu A konstrukciju 10 klucīšu augstumā?

b) Izpēti konstrukciju B un sastādi atbilstošo skaitļu virkni!

c) Kāds ir sakars starp konstrukcijām A un B?

Atrisinājums. A veida konstrukciju var sadalīt slāņos, kādi aplūkoti iepriekšējā uzdevumā. Tad A konstrukcijas klucīšu skaits vispārīgā veidā aprēķināms

$$S(1)+S(2)+S(3)+....S(n), kur \quad S(n)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) \text{ jeb sīkāk izrakstot:}$$

$$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+...=\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)(n+2)$$

Piezīme. Lai pamatotu pēdējo formulu, nepieciešamas dziļākas algebras zināšanas (formulu var pierādīt, grupējot saskaitāmos citā veidā un lietojot arī kvadrātu summas formulu[2], vai arī ar matemātiskās indukcijas palīdzību).

A veida konstrukcijai augstumā 10 nepieciešami ir $\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 12=220$ klucīši.

Viegli redzēt, ka konstrukcija B ir veidota no stabiņiem – viens stabiņš no 1 klucīša, 2 stabiņi katrs no 2 klucīšiem, 3 stabiņi katrs no 3 klucīšiem. B konfigurācijas klucīšu skaits ir aprēķināms pēc kvadrātu summas formulas[3]:

$$1^2+2^2+3^2+...=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)(2n+1)$$

B veida konstrukcijai augstumā 10 ir nepieciešami $\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21=385$ klucīši.

Salīdzinot dotās A un B konstrukcijas, var ievērot, ka B konstrukciju var papildināt ar A konstrukcijas augšējiem diviem slāņiem, pagriežot tos otrādi. Te veidosies 6 stabiņi augstumā 3. Vispārīgā veidā:

$$S_B(n)+S_A(n-1)=n\cdot S(n)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot n(n+1)=\frac{1}{2}\cdot n^2(n+1),$$

kur $S_B(n)$ apzīmē konfigurācijas B augstumā *n* izmantoto klucīšu skaitu, bet $S_A(n-1)$ ir nepieciešamo klucīšu skaits, lai konstruētu konfigurāciju A augstumā *n* – 1.

---

[2] Skat, piemēram: https://www.meritnation.com/ask-answer/question/1-1-2-1-2-3-1-2-3-4-find-the-sum-of-the-series/sequences-and-series/6804233

[3] Skat. dažādi pamatojumi: https://brilliant.org/wiki/sum-of-n-n2-or-n3/