Jauno matemātiķu konkurss

2017./2018. mācību gads

1. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Rudens rēbuss

Atrodi vienu piemēru, ar kādu burtu dotajā skaitļu rēbusā aizstāts katrs cipars, ja vienādi burti apzīmē vienādus ciparus, bet dažādi burti – dažādus ciparus!

$$\begin{array}{ccccccc} & & S & A & U & L & E \\ + & L & I & E & T & U & S \\ \hline & R & U & D & E & N & S \end{array}$$

Atrisinājums. Dotajam rēbusam ir divi atrisinājumi, taču pietiek uzrādīt vienu no tiem.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 9 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ + & 5 & 4 & 0 & 7 & 3 & 9 \\ \hline & 6 & 3 & 2 & 0 & 8 & 9 \end{array}$$

$A = 1, D = 2, E = 0, I = 4, L = 5,$

$N = 8, R = 6, S = 9, T = 7, U = 3$

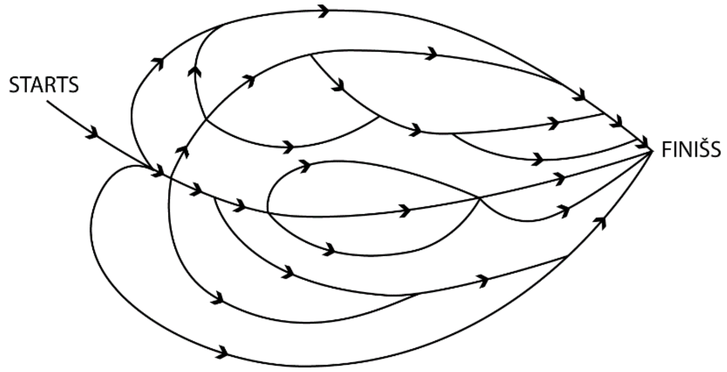
$$\begin{array}{ccccccc} & & 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ + & 5 & 9 & 0 & 7 & 3 & 4 \\ \hline & 6 & 3 & 2 & 0 & 8 & 4 \end{array}$$

$A = 1, D = 2, E = 0, I = 9, L = 5,$

$N = 8, R = 6, S = 4, T = 7, U = 3$

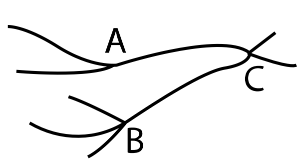
2. Mudrītes fantāzija

Skudra Mudrīte mežā uzkāpa uz nokritušas koka lapas un iztēlojās, ka ir nokļuvusi pilsētā, kur lapas dzīslas un kontūrs ir vienvirziena ielas (skat. 1. att.). Cik dažādos veidos Mudrīte var nokļūt no starta finišā, pārvietojoties tikai pa ielām, turklāt bultiņu norādītajā virzienā?

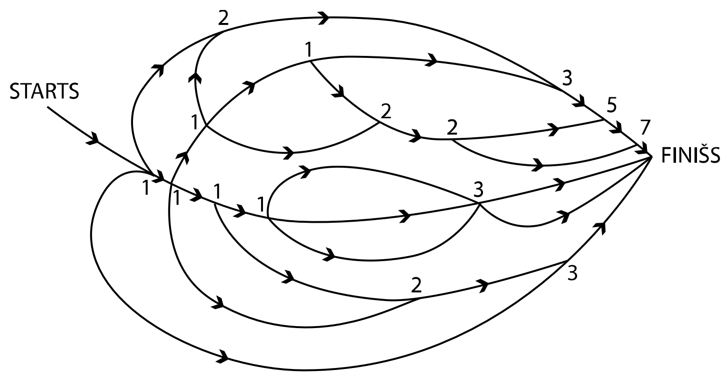


1. att.

Atrisinājums. Ievērojam, ja krustojumā A skudriņa var nokļūt a veidos, bet krustojumā B skudriņa var nokļūt b veidos, tad krustojumā C tā var nokļūt $a + b$ veidos (skat. 2. att.). Pakāpeniski aprēķināsim, cik veidos skudriņa var nokļūt katrā krustojumā (skat. 3. att.). Tātad no starta finišā skudriņa var nokļūt $7 + 3 + 3 + 3 = 16$ veidos.



2. att.



3. att.

3. Baraviku gads

Elzas mašīnas bagāžniekā bija 33 baravikas un 30 gailenes, citu sēņu bagāžniekā nebija. Francis par 4 baravikām Elzai dod pretī 7 gailenes, bet Skaidris – par 10 gailenēm dod pretī 4 baravikas. Vai, atkārtoti mainot sēnes, Elza var panākt, ka bagāžniekā ir **a)** tieši 111 sēnes; **b)** tieši 1111 sēnes?

Atrisinājums. a) Pamatosim, ka tas nav iespējams. Sākumā Elzai ir 63 sēnes. Tātad, lai iegūtu tieši 111 sēnes, maiņu rezultātā ir jāiegūst tieši 48 sēnes. Elzai nav jēgas mainīties tikai ar Skaidri, jo tad kopējais sēņu skaits samazinās. Ja Elza mainītos tikai ar Franci, tad katrā gājienā sēņu skaits palielinātos par 3 un būtu jāizdara tieši 16 maiņas, bet 16 maiņām ir nepieciešamas $4 \cdot 16 = 64$ baravikas. Tik daudz baraviku Elzai nav, tātad kādā brīdī būtu jāizdara maiņa ar Skaidri. Ja Elza ir veikusi maiņu ar Skaidri un maiņu ar Franci, tad šo divu maiņu rezultātā baraviku skaits nav izmainījies, bet gaileņu skaits ir samazinājies par 3. Tātad, veicot maiņu gan ar Franci, gan ar Skaidri, kopējo sēņu skaitu nevar palielināt.

b) Pamatosim, ka tas nav iespējams. Ievērojam, ka sākumā Elzai bija $33 + 30 = 63$ sēnes – skaitlis, kas dalās ar 3. Aplūkosim, kā izmainās kopējais sēņu skaits, atkarībā no tā, kuru maiņu Elza izdara:

- ja par 4 baravikām Elza pretī saņem 7 gailenes, tad kopējais sēņu skaits palielinās par 3 (par skaitli, kas dalās ar 3), tātad sēņu skaits bija skaitlis, kas dalās ar 3, un paliek skaitlis, kas dalās ar 3;
- ja par 10 gailenēm Elza pretī saņem 4 baravikas, tad kopējais sēņu skaits samazinās par 6 (par skaitli, kas dalās ar 3), tātad sēņu skaits bija skaitlis, kas dalās ar 3, un paliek skaitlis, kas dalās ar 3.

Tātad kopējais sēņu skaits vienmēr ir skaitlis, kas dalās ar 3. Tā kā 1111 ir skaitlis, kas nedalās ar 3, tad tieši 1111 sēnes Elza iegūt nevarēs.

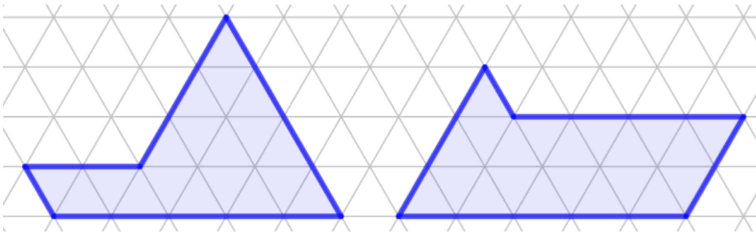
Piezīme. a) gadījuma risinājums sniedz atbildi arī b) gadījumam.

4. Maģiskie un perfektie polimondi

a) Vai trijstūra režģī ir iespējams uzzīmēt tādu figūru (maģisku polimondu), kuras malu garumi ir naturāli skaitļi no 1 līdz 6 (ne obligāti augošā secībā)?

b) Vai trijstūra režģī ir iespējams uzzīmēt tādu figūru (perfektu polimondu), kuras malu garumi ir naturāli skaitļi no 1 līdz 6 augošā secībā?

Piemēram, 4. att. pa kreisi dots perfekts polimonds, kura malu garumi pēc kārtas ir 1; 2; 3; 4; 5, bet pa labi – maģisks polimonds, kura malu garumi pēc kārtas ir 1; 4; 2; 5; 3.

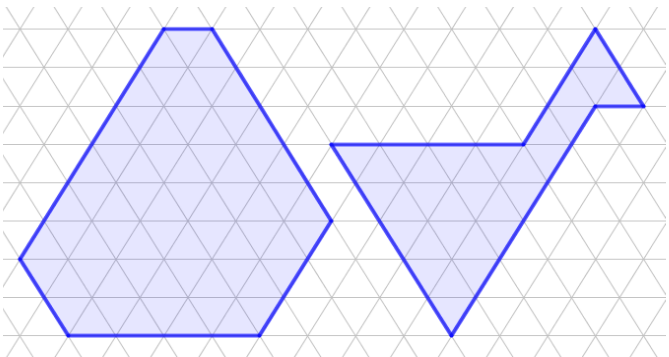


4. att.

Atrisinājums. a) Jā, ir iespējams uzzīmēt maģisku polimondu, kura malu garumi ir naturāli skaitļi no 1 līdz 6, skat., piemēram, 5. att. pa kreisi.

b) Jā, ir iespējams uzzīmēt perfektu polimondu, kura malu garumi ir naturāli skaitļi no 1 līdz 6, skat. 5. att. pa labi.

Piezīme. Risinājumā pietiek uzrādīt arī tikai perfektu polimondu, jo tas apmierina gan a), gan b) gadījuma nosacījumus.

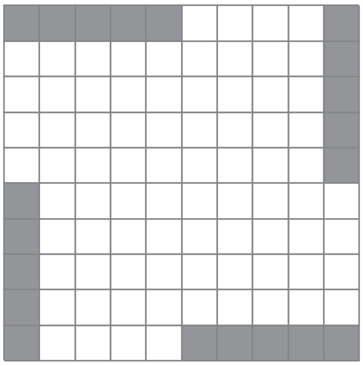


5. att.

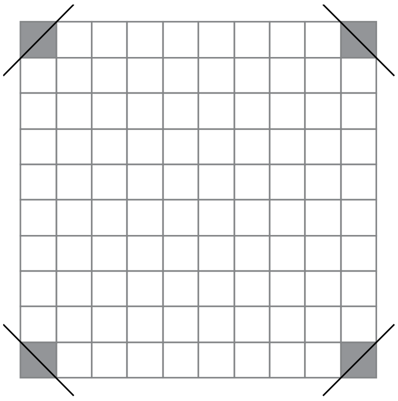
5. Iekrāso rūtiņas!

Kāds mazākais rūtiņu skaits jāiekrāso 10×10 rūtiņu kvadrātā, lai uz katras taisnes, kas iet caur jebkuras rūtiņas centru paralēli kādai kvadrāta malai vai diagonālei, atrastos vismaz viena iekrāsota rūtiņa?

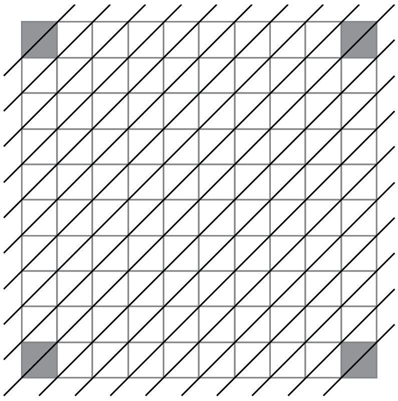
Atrisinājums. Mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso 10×10 rūtiņu kvadrātā atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, ir 20, skat., piemēram, 6. att. Pamatosim, ka mazāk rūtiņu nav iespējams iekrāsot.
Caur katru stūra rūtiņu var novilkt taisni, paralēlu kādai kvadrāta diagonālei, tā, ka tā krusto tikai vienu rūtiņu (skat. 7. att.). Tātad visām stūra rūtiņām jābūt iekrāsotām. Caur visiem rūtiņu centriem var novilkt 19 dažādas, savā starpā paralēlas taisnes. Uz katras no tām jābūt vismaz vienai iekrāsotai rūtiņai. Uz trijām novilktajām taisnēm jau ir iekrāsotas rūtiņas (skat. 8. att.). Tātad vēl jāiekrāso ne mazāk kā $19 - 3 = 16$ rūtiņas, tas nozīmē, ka iekrāsotām jābūt vismaz $4 + 16 = 20$ rūtiņām.



6. att.



7. att.



8. att.