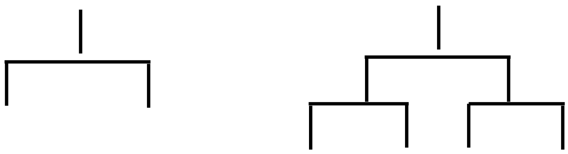
Decembra konkursiņš! **(B grupa)** Atrisinājumi
1.12.2017

1. Agate zīmēja sekojošas struktūras:



Pirmajā zīmējumā ir 1 horizontāls nogrieznis un 3 vertikāli. Tad viņa katru nākamo zīmējumu zīmēja lielāku, katram apakšējam vertikālajam nogrieznim pievienojot vienu horizontālu un galos divus vertikālus uz leju vērstus nogriežņus. Un tā turpināja. Cik nogriežņu būs 10-tajā zīmējumā kopumā?

Atbilde. Desmitajā zīmējumā kopumā ir 3070 nogriežņi.

Atrisinājums. Ievērosim, ka ir izdevīgi horizontālos un vertikālos nogriežņus skaitīt atsevišķi:

Zīmējums	**Horizontālie nogriežņi**	**Vertikālie nogriežņi**
Pirmais	1	3
Otrais	1+2	3 + 4
Trešais	1+2+4	3+4+8
Ceturtais	1+2+4+8	3+4+8+16
Piektais	1+2+4+8+16	3+4+8+16+32
Sestais……..	1+2+4+8+16+32	3+4+8+16+32+64

Tad desmitajā zīmējumā būs 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1023 horizontālie nogriežņi, bet vertikālie būs par 1024 vairāk. Kopumā nogriežņu skaits ir $1023\cdot 2+1024=3070$

Piezīme. Var izveidot arī vispārīgu formulu (5. – 6. klašu mācību programmā gan vēl neapskata pakāpju īpašības). Ievērojot zināmo formulu:

$1+2+4++....+2^n=2^{n+1}-1$, nogriežņu skaitu n-tajā zīmējumā var aprēķināt sekojoši

$$2^n-1+2^{n+1}-1=2^n(1+2)-2=3\cdot 2^n-2$$

2. Doti cipari 0, 1, 2, 3. Cik dažādus četrciparu skaitļus var izveidot, katra skaitļa pierakstā izmantojot tieši divus no šim cipariem? (piemēram, 1211)

Atbilde. Var izveidot 63 dažādus skaitļus.

Atrisinājums. No četriem cipariem divus ciparus var izvēlēties 6 veidos. Jāšķiro gadījumi, ja ir izvēlēts cipars 0 vai nav. Aplūkosim gadījumu, kad ir izvēlēts cipars 0. Skaidrs, ka 4-ciparu skaitlis nevar sākties ar 0. Tad ciparu 0 var izvietot vienu, desmitu vai simtu pozīcijās. Ja skaitlis jāizveido, izmantojot tikai 2 ciparus, tad skaitlī var būt viena, divas vai 3 nulles:

- Ja skaitlis satur vienu nulli – tad tā var būt izvietota vienā no trim pozīcijām.

- Ja skaitlis satur divas nulles, tad tās var būt izvietotas 3 veidos: $\overline{a0a0}$; $\overline{a00a}$; $\overline{aa00}$
- Ja skaitlis satur 3 nulles, tad tāds ir viens skaitlis.

Ievērojot, ka nenulles ciparu un 0 var izvēlēties 3 veidos, tad tādu četrciparu skaitļu skaits, kas satur vismaz vienu 0 ir $3\cdot(3+3+1)=21$

Divus nenulles ciparus var izvēlēties 3 veidos. Izsekosim kā var izvietot vienu ciparu *a*, tad atlikušajās četrciparu skaitļa pozīcijās raksta otru ciparu.

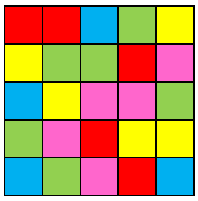
- Vienu ciparu *a* var izvietot vienā no četrām pozīcijām.
- Divus vienādus ciparus *a* četrās pozīcijās var izvietot 6 veidos.
- Trīs vienādus ciparus četrciparu skaitlī var izvietot 4 veidos.

Tādu četrciparu skaitļu skaits, kuri nesatur nulles ir $3\cdot(4+6+4)=42$

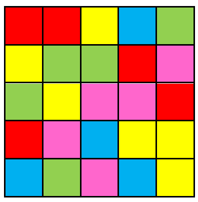
Kopējais pēc uzdevuma nosacījumiem izveidoto skaitļu skaits ir 21+42=63

3. Izkrāso kvadrāta 5 x 5 rūtiņas tā, lai katrā rindā un katrā kolonā ir tieši divas vienādas krāsas rūtiņas. Vienādās krāsas rūtiņas katrā rindā ir citā krāsā. Tāpat arī kolonās. Kāds ir mazākais nepieciešamais krāsu skaits? Pamato!

Atrisinājums. Kvadrātā ir 5 rindas, tāpēc nepieciešamas ir 5 krāsas. Izkrāsot kvadrātu piecās krāsās pēc uzdevuma nosacījumiem var. Piemēram:



Piezīme. Var izveidot arī tādu krāsojumu, kur uz abām diagonālēm arī ir tieši divas vienādas krāsas rūtiņas:



4. Katru nakti divi rūķi iet sargāt raktuvēs iegūto dimantu krātuvi. Viņi sastādījuši sarakstu, kurā ierakstīti visi dažādi sargu pāri. Cik garš ir rūķu saraksts, ja kopumā ir 7 sargi?

Atbilde. Sarakstā ierakstīts 21 rūķu pāris.

Atrisinājums. Pirmais rūķis veido sešus pārus ar citiem rūķiem. Otrais rūķis veido vēl piecus pārus ar visiem citiem rūķiem, izņemot pirmo rūķi. Trešais rūķis ir jau ierakstīts pārī ar pirmo un otro rūķi, tāpēc tas veido vēl četrus atšķirīgus pārus ar atlikušajiem rūķiem. Tālākais spriedums līdzīgs. Rūķu pāru skaits ir 6+5+4+3+2+1=21.

5. Fidelandē naudu skaita *krakos*. Fidelandiešu naudas zīmes ir 1, 3, 5, 10 un 23 kraku vērtībā. 23 kraku naudas zīmi samainīja 10 naudas zīmēs. Pierādiet, ka vismaz viena naudas zīme ir ar nomināciju 10 kraki!

Atrisinājums. Starp visām naudas zīmēm ir tikai viena pāra skaitļa naudas zīme. Ja starp visām desmit naudas zīmēm būtu tikai nepārskaitļa zīmes, tad to summa būtu pārskaitlis, tas ir, nebūtu vienāda ar 23. Tas nozīmē, ka ir viena naudas zīme 10 kraku vērtībā. Divas tādas nevar būt, jo tad lielākais būtu lietotas 5 naudas zīmes: 10+10+1+1+1=23. Ja naudas zīmju komplektā ir nominācija 10 kraki, tad naudas zīmju komplekts var būt

10+5+1+1+1+1+1+1+1+1=23 vai 10+3+3+1+1+1+1+1+1+1=23.