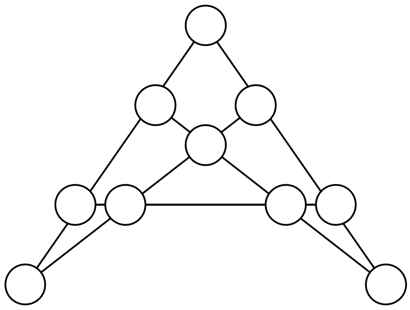
Jauno matemātiķu konkurss
2017./2018. mācību gads

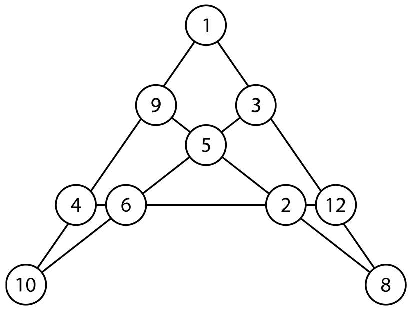
2. kārtas uzdevumi

1. Maģiskā figūra
Vai katrā tukšajā aplītī (skat. 1. att.) var ierakstīt vienu naturālu skaitli tā, lai aplīšos būtu ierakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 12, katrs ne vairāk kā vienu reizi, un lai skaitļu summa uz katras no piecām dotajām taisnēm būtu viena un tā pati?

Atrisinājums. Jā, var skat., piemēram, 2. att., kur summa uz katras no piecām dotajām taisnēm ir 24.



1. att.



2. att.

2. Nellijas dāsnums
Nellijai ir 33 āboli, kurus viņa grib iedot savām četrām draudzenēm, nevienu ābolu nesadalot daļās.

a) Vai Nellija var ābolus izdalīt tā, ka draudzenei, kas saņēmusi visvairāk ābolu, ir tieši par vienu ābolu vairāk nekā katrai no pārējām draudzenēm?

Nellija izdomāja izdalīt ābolus draudzenēm tā, ka starpība starp vislielāko iedoto ābolu skaitu un vismazāko iedoto ābolu skaitu, ir ne vairāk kā 4.

b) Vai to var izdarīt, ja vienai draudzenei Nellija iedod 11 ābolus?
c) Vai Nellija kādai draudzenei var iedot vairāk nekā 11 ābolus?
d) Kāds ir mazākais skaits ābolu, ko Nellija var iedot kādai draudzenei?

Atrisinājums. a) Jā, var. Ja Nellija trīs draudzenēm katrai iedos pa 8 āboliem, bet ceturtajai – 9 ābolus, tad kopā būs iedoti $8+8+8+9=33$ āboli un vienai no draudzenēm (tai, kurai ir visvairāk ābolu) būs tieši par vienu ābolu vairāk nekā pārējām.
b) Jā, var. Ja Nellija divām draudzenēm iedos pa 7 āboliem, vienai – 8 ābolus un vienai – 11 ābolus, tad kopā būs iedoti $7+7+8+11=33$ āboli un starpība starp vislielāko iedoto ābolu skaitu un vismazāko iedoto ābolu skaitu ir $11-7=4$, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem.
c) Nē, nevar. Ja kāda draudzene saņems vairāk nekā 11 ābolus, tas ir, vismaz 12 ābolus, tad pārējām draudzenēm būs jāizdala ne vairāk kā $33-12=21$ ābols. Tas nozīmē, ka kāda draudzene saņems ne vairāk kā 7 ābolus, bet tad starpība starp vislielāko iedoto ābolu skaitu un vismazāko iedoto ābolu skaitu būs vismaz $12-7=5$, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.
d) Mazākais skaits ābolu, ko Nellija var iedot kādai draudzenei, ir 6 āboli. Ja Nellija vienai draudzenei iedos 6 ābolus, bet pārējām pa 9 āboliem, tad kopā būs iedoti $6+9+9+9=33$ āboli un starpība starp vislielāko iedoto ābolu skaitu un vismazāko iedoto ābolu skaitu būs $9-6=3$, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Pamatosim, ka mazāk kā 6 ābolus Nellija nevarēs iedot kādai draudzenei, lai izpildītos uzdevuma prasības. Ja kāda draudzene saņems ne vairāk kā 5 ābolus, tad atliks vēl vismaz $33-5=28$ āboli, kas jāizdala pārējām trim draudzenēm. Ja katra no trim draudzenēm saņemtu ne vairāk kā 9 ābolus, tad kopā būtu izdalīti ne vairāk kā 27 āboli, bet ir jāizdala vismaz 28 āboli. Tas nozīmē, ka kāda no šīm trim draudzenēm saņems vismaz 10 ābolus, bet tad starpība starp vislielāko iedoto ābolu skaitu un vismazāko iedoto ābolu skaitu būs vismaz $10-5=5$, kas ir vairāk nekā 4, un tātad neatbilst uzdevuma nosacījumiem.

3. Dažādo dalītāju summa

Mārtiņš uz lapas uzrakstīja naturālu skaitli un aprēķināja šī skaitļa visu dažādo dalītāju summu, neieskaitot pašu uzrakstīto skaitli. Vai iegūtā summa var būt **a)** 1; **b)** 5; **c)** 34?

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, ja uz lapas ir uzrakstīts skaitlis 7. Tas ir pirmskaitlis un vienīgais tā dalītājs, kas atšķiras no paša skaitļa 7, ir 1.

Piezīme. Jebkurš pirmskaitlis apmierina a) gadījuma nosacījumu.

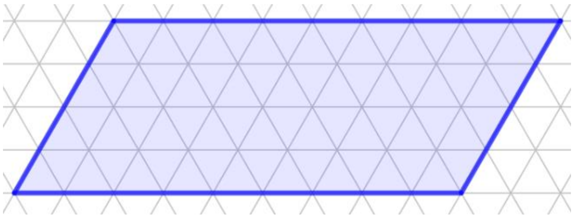
b) Nē, nevar. Summā noteikti ietilpst skaitlis 1, jo katrs naturāls skaitlis dalās ar 1. Tātad atlikušo dalītāju summai jābūt 4. Skaitli 4 summā var iegūt šādos veidos: $4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$. Tā kā dalītāji nedrīkst atkārtoties, tad vienīgā iespēja, kā iegūt summā 5, ir $5 = 1 + 4$, taču, ja skaitlis dalās ar 4, tad tas dalās arī ar 2. Tātad uzrakstītā skaitļa dalītāju summa nevar būt 5.

c) Jā, var, piemēram, ja uz lapas ir uzrakstīts skaitlis 62. Skaitļa 62 dalītāji, kas atšķiras no paša skaitļa, ir 1; 2 un 31, to summa ir $1 + 2 + 31 = 34$.

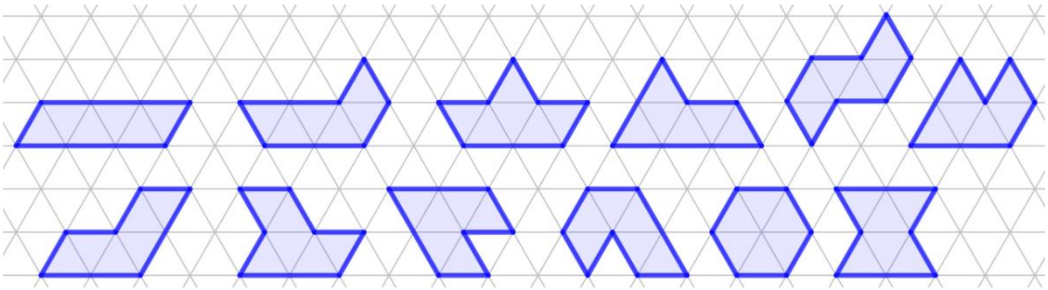
4. Vai var pārklāt?

a) Vai 3. att. redzamo figūru var pārklāt, izmantojot katru no 4. att. redzamajām figūrām tieši vienu reizi? Figūras drīkst pagriezt vai apgriezt spoguļattēlā.

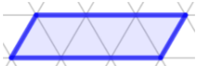
b) Vai 3. att. redzamo figūru var pārklāt ar vienpadsmit 5. att. redzamajām figūrām un vienu 6. att. redzamo figūru? Figūras drīkst pagriezt vai apgriezt spoguļattēlā.



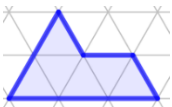
3. att.



4. att.

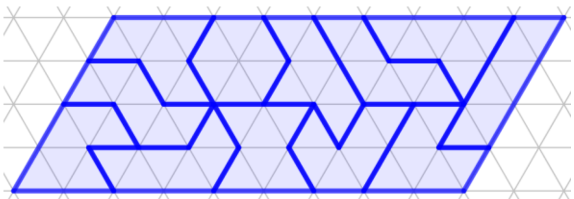


5. att.



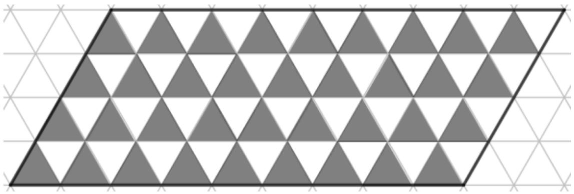
6. att.

Atrisinājums. a) Jā, var, skat. 7. att.

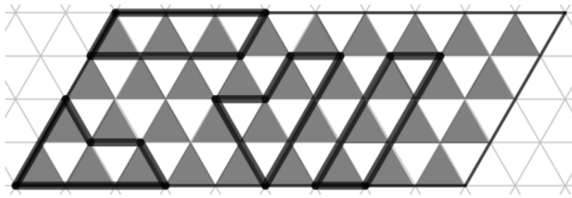


7. att.

b) Pamatosim, ka prasītais nav iespējams. Iekrāsojot 3. att. doto figūru tā, kā parādīts 8. att., iegūstam 36 melnus un 36 baltus trijstūrīšus. Lai kur novietotu 5. att. redzamo figūru, tā vienmēr noklās tieši 3 melnus un tieši 3 baltus trijstūrīšus (skat. 9. att.). Tātad vienpadsmit tādas figūras kopā noklās 33 melnus un 33 baltus trijstūrīšus. Nenoklāti paliks vēl 3 melni un 3 balti trijstūrīši, kas jānoklāj ar 6. att. doto figūru. Taču, lai kur novietotu 6. att. doto figūru, tā vienmēr noklāj atšķirīga skaita melnos un baltos trijstūrīšus (skat. 9. att.).



8. att.

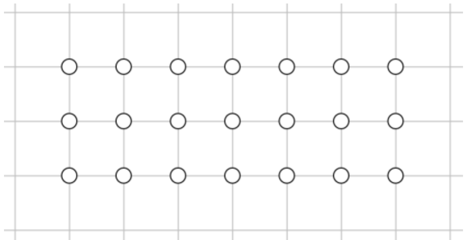


9. att.

5. Vienkrāsains taisnstūris

Rūtiņu lapā 20×20 rūtiņas katras rūtiņas virsotne nokrāsota vai nu melnā, vai dzeltenā krāsā. Pierādīt, ka, neatkarīgi no virsotņu krāsojuma, šajā lapā var uzzīmēt taisnstūri, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs un visas virsotnes ir vienā krāsā!

Atrisinājums. Apskatām 3×7 punktu režģi (skat. 10. att.). Katrā kolonnā būs vismaz divas rūtiņu virsotnes, kas abas ir nokrāsotas vienā un tajā pašā krāsā. Ir seši dažādi veidi, kā var būt izvietotas šīs divas vienas krāsas virsotnes: mmx; mxm; xmm; ddx; dxd; xdd, kur m – melnā krāsā nokrāsota virsotne, d – dzeltenā krāsā nokrāsota virsotne un x – atlikušās virsotnes krāsa (melna vai dzeltena). Tā kā ir 7 kolonnas, bet ir 6 dažādi izvietojumi, tad noteikti būs divas kolonnas (Dirihlē princips), kurām sakritīs divu vienādā krāsā nokrāsoto virsotņu izvietojums. Šīs 4 rūtiņu virsotnes veidos meklēto taisnstūri.



10. att.