Jauno matemātiķu konkurss
2017./2018. mācību gads

3. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Ieraksti skaitļus!
Ieraksti tabulā (skat. 1. att.) deviņus pozitīvus skaitļus tā, lai

- katrā rūtiņā būtu ierakstīts viens skaitlis;
- visu ierakstīto skaitļu summa būtu 13;
- no katra skaitļa blakus rūtiņā pa labi atrastos divas reizes lielāks skaitlis;
- no katra skaitļa blakus rūtiņā uz leju atrastos trīs reizes lielāks skaitlis!

1. att.

Atrisinājums. Uzdevumam ir viens vienīgs atrisinājums, skat. 2. att.

$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{12}{7}$
$\frac{9}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{36}{7}$

2. att.

a	$2a$	$4a$
$3a$	$6a$	$12a$
$9a$	$18a$	$36a$

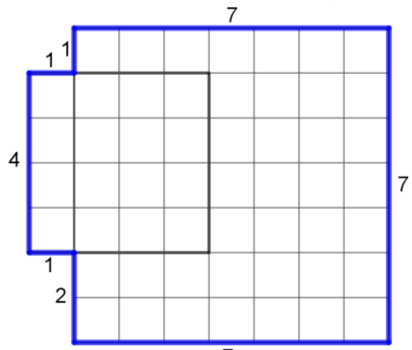
3. att.

Piezīme. Atrisinājumu var palīdzēt atrast tālāk aprakstītie spriedumi. Apzīmējam meklētos skaitļus tā, kā parādīts 3.att. Visu ierakstīto skaitļu summa ir 13, tāpēc $91a = 13$ jeb $a = \frac{13}{91} = \frac{1}{7}$.

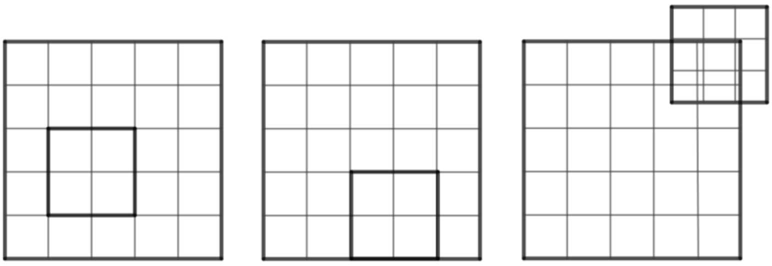
2. Atrodi mazāko skaitli!
Kāds ir mazākais skaitlis, kura pierakstā ir izmantoti tikai cipari 3 un 4, katrs vismaz vienu reizi un kas dalās gan ar 3, gan ar 4?

Atrisinājums. Mazākais skaitlis, kas atbilst uzdevuma prasībām, ir 3444.
Pamatosim, ka mazāku skaitli nevar atrast. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā visu ciparu summai jādalās ar 3. Lai skaitlis dalītos ar 4, divciparu skaitlim, ko veido dotā skaitļa pēdējie divi cipari, jādalās ar 4.
Tā kā var izmantot tikai ciparus 3 un 4, tad skaitļa pēdējiem diviem cipariem ir jābūt 4 un 4.
Meklētais skaitlis nav divciparu skaitlis, jo 44 nedalās ar 3, tas nav arī trīsciparu skaitlis, jo tā pirmajam ciparam ir jābūt 3 (jo pēdējie divi ir 4), bet 344 nedalās ar 3.
Mazākais iespējamais četrciparu skaitlis, kas satur tikai ciparus 3 un 4 un kas dalās ar 4, ir 3344, bet tas nedalās ar 3.
Nākamais mazākais skaitlis ir 3444 un tas atbilst visām uzdevuma prasībām.

3. Rūtiņu lapa
Hanna no rūtiņu lapas pa rūtiņu līnijām izgrieza vairākus kvadrātus, kuriem malas garums ir vismaz divas rūtiņas. Viņa izvēlējās divus kvadrātus un uzlika vienu otram virsū tā, lai rūtiņu līnijas sakristu un lai viens kvadrāts pilnībā neatrastos otra kvadrāta iekšpusē. Tad viņa aprēķināja iegūtās lielās figūras perimetru. Piemēram, 4. att. dots derīgs pārklājums, kur iegūtās figūras perimetrs ir $1 + 1 + 7 + 7 + 7 + 2 + 1 + 4 = 30$, bet 5. att. doti nederīgi pārklājumi.



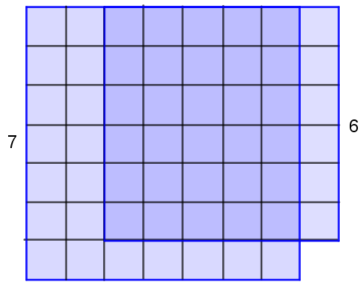
4. att.



5. att.

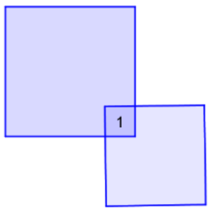
a) Parādi, kā jāsavieto 6×6 un 7×7 rūtiņu kvadrāts, lai iegūtās figūras perimetrs būtu 30.
b) Zināms, ka abiem kvadrātiem kopīga ir tieši viena rūtiņa un iegūtās figūras perimetrs ir 32. Atrodi visus iespējamos abu kvadrātu izmērus!
c) Zināms, ka abiem kvadrātiem kopīgas ir tieši 12 rūtiņas un iegūtās figūras perimetrs ir 30. Atrodi visus iespējamos abu kvadrātu izmērus!

Atrisinājums
a) Skat. 6. att., kur iegūtās figūras perimetrs ir $7 + 8 + 6 + 1 + 1 + 7 = 30$.

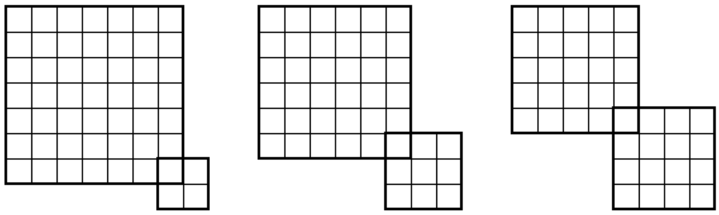


6. att.

b) Ja kvadrātiem ir tieši viena kopīga rūtiņa, tad vienīgā iespēja, ka pārklājas rūtiņa, kas atrodas kvadrātu stūros (skat. 7. att.).



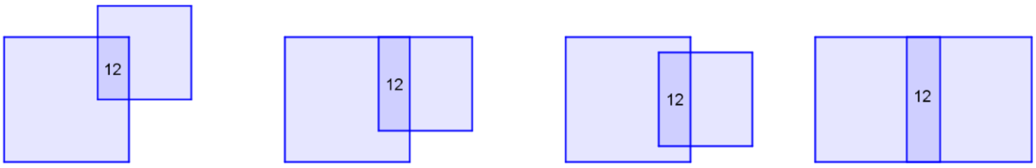
7. att.



8. att.

Tā kā kopīgās daļas perimetrs ir 4, tad abu kvadrātu perimetru summa ir $32 + 4 = 36$. Viena kvadrāta malas garumu apzīmējam ar a, otra kvadrāta – ar b. Tad $4a + 4b = 36$ un $a + b = 9$. Tātad vienīgie iespējamie kvadrātu malu garumi ir 2 un 7, 3 un 6, 4 un 5 (skat. 8. att.).

c) Neņemot vērā pagriešanu un spoguļattēlus, ir četri dažādi veidi, kā var būt novietoti abi kvadrāti (skat. 9. att.).

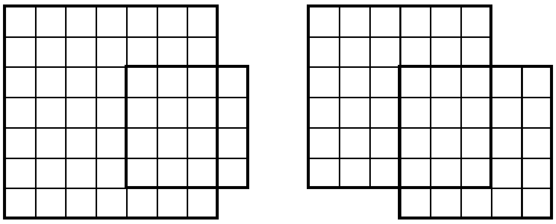


9. att.

Iegūtās figūras perimetrs ir vienāds ar abu kvadrātu perimetru summu, no kā atņemts kopīgās daļas perimetrs. Tā kā abiem kvadrātiem kopīgas ir tieši 12 rūtiņas, tad kopīgā daļa var būt taisnstūris ar izmēriem $12 \times 1, 6 \times 2$ vai 4×3. Apskatām visus šos gadījumus.

- Ja kopīgs ir taisnstūris ar izmēriem 12×1, tad abu kvadrātu malu garumiem ir jābūt vismaz 12. Tātad iegūtās figūras perimetrs ir vismaz $4 \cdot 12 + 4 \cdot 12 - 2 \cdot (12 + 1) = 70$, kas pārsniedz 30 – šis gadījums neder.
- Ja kopīgs ir taisnstūris ar izmēriem 6×2, tad abu kvadrātu malu garumiem jābūt vismaz 6. Tātad iegūtās figūras perimetrs ir vismaz $4 \cdot 6 + 4 \cdot 6 - 2 \cdot (6 + 2) = 32$, kas pārsniedz 30 – šis gadījums neder.
- Ja kopīgs ir taisnstūris ar izmēriem 4×3, tad abu kvadrātu malu garumiem jābūt vismaz 4. Tātad iegūtās figūras perimetrs ir vismaz $4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot (4 + 3) = 18$. Abu kvadrātu perimetru summa ir $30 + 2 \cdot (4 + 3) = 44$. Viena kvadrāta malas garumu apzīmējam ar a, otra kvadrāta – ar b. Tad

$4a + 4b = 44$ un $a + b = 11$. Tātad vienīgie iespējamie kvadrātu malu garumi ir 4 un 7, 5 un 6 (skat. 10. att.).



10. att.

4. Rūķu māju numuri

Ziemassvētku vecīša ciematā uz katra rūķu namiņa ir numurs ar šādām īpašībām:

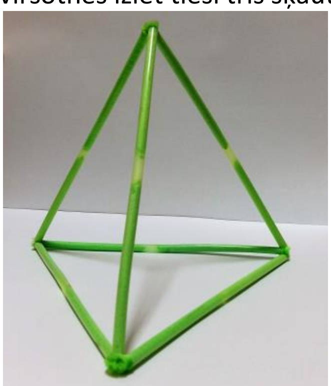
- tas ir piecciparu skaitlis, kura visi cipari ir dažādi;
- šī skaitļa pirmais cipars ir vienāds ar četru pārējo ciparu summu.

Cik rūķu namiņu atrodas šajā ciematā, ja katrs skaitlis, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir tieši uz viena namiņa?

Atrisinājums. Tā kā skaitļa pēdējo četru ciparu summai jābūt vienādi ar pirmo ciparu, tad tā nepārsniedz 9. Ievērojam, ka viens no šiem četriem cipariem noteikti ir 0, jo pretējā gadījumā mazākā summa, ko varam iegūt, ir $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Pavisam iespējami septiņi dažādi varianti, kā var izvēlēties skaitļa pēdējos četrus ciparus: $\{0; 1; 2; 3\}$, $\{0; 1; 2; 4\}$, $\{0; 1; 2; 5\}$, $\{0; 1; 2; 6\}$, $\{0; 1; 3; 4\}$, $\{0; 1; 3; 5\}$, $\{0; 2; 3; 4\}$. Katru no šiem ciparu komplektiem var sakārtot 24 dažādos veidos (četras iespējas pirmajam skaitlim un trīs iespējas otrajam skaitlim, un divas iespējas trešajam skaitlim un viena – pēdējam, tas ir, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$). Tā kā katru no 7 komplektiem var sakārtot 24 veidos, iegūstam, ka ciematā ir $7 \cdot 24 = 168$ rūķu namiņi.

5. Matemātiskie puzuri

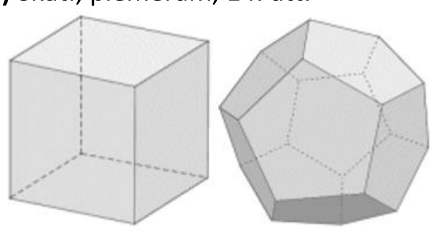
11. att. dots daudzskaldnis, kuram no katras virsotnes iziet tieši trīs šķautnes.



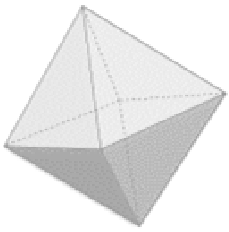
11. att.

a) Izveido vēl divus cita veida daudzskaldņus, kuram no katras virsotnes iziet tieši trīs šķautnes!
b) Izveido daudzskaldni, kuram no katras virsotnes iziet tieši četras šķautnes!
c) Izveido daudzskaldni, kuram no katras virsotnes iziet tieši piecas šķautnes!
Fotogrāfijas vai zīmējumus sūti mums!

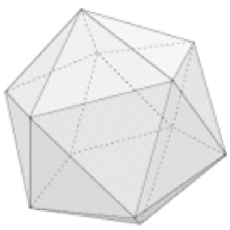
Atrisinājums
a) Skat., piemēram, 12. att.
b) Skat., piemēram, 13. att.
c) Skat., piemēram, 14. att.



12. att.



13. att.



14. att.

Piezīme. Attēlos redzamie daudzskaldņi tiek saukti par Platona ķermeņiem jeb regulāriem daudzskaldņiem. No 11. att. līdz 14. att. attiecīgi redzams tetraedrs (regulārs četrskaldnis), kubs (heksaedrs – regulārs sešskaldnis), dodekaedrs (regulārs divpadsmitskaldnis), oktaedrs (regulārs astoņskaldnis) un ikosaedrs (regulārs divdesmitskaldnis).