Latvijas 68. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi
5.-8. klase

5.1. Parādi divus dažādus piemērus, kādi naturāli skaitļi var būt ierakstīti $\square$ vietā, lai ir patiesa vienādība

$$\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}=1$$

Piezīme. Piemēri, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo secību, nav dažādi.

Atrisinājums. Der jebkuri divi no variantiem:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1; \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1; \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=1$$

5.2. Tautas deju kolektīvā ir 18 dejotāji, jaunākajam no tiem ir 11 gadi, bet vecākajam – 15 gadi.

a) Vai noteikti šajā kolektīvā ir dejotājs, kuram ir 13 gadi?

b) Vai varētu gadīties, ka šajā kolektīvā ir tikai četru dažādu vecumu dejotāji?

c) Vai noteikti šajā kolektīvā ir vismaz pieci dejotāji, kam ir vienāds gadu skaits?

d) Vai noteikti šajā kolektīvā ir vismaz četri dejotāji, kam ir vienāds gadu skaits?

Atrisinājums

a) Nē, piemēram, varētu gadīties, ka vienam dejotājam ir 11 gadi, bet pārējiem 17 dejotājiem – 15 gadi.

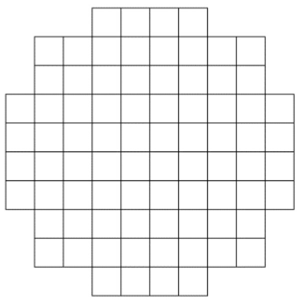
b) Jā, piemēram, varētu gadīties, ka 1 dejotājam ir 11 gadi, 1 dejotājam – 12 gadi, 1 dejotājam – 13 gadi un 15 dejotājiem – 15 gadi.

c) Nē, piemēram, varētu gadīties, ka 4 dejotājiem ir 11 gadi, 4 dejotājiem – 12 gadi, 4 dejotājiem – 13 gadi, 3 dejotājiem – 14 gadi un 3 dejotājiem – 15 gadi.

d) Jā, noteikti. Sadalīsim dejotājus grupās atbilstoši to gadu skaitam: {11}; {12}; {13}; {14}; {15}. Ja katrā grupā būtu ne vairāk kā 3 dejotāji, tad pavisam kopā kolektīvā būtu ne vairāk kā $3\cdot 5=15$ dejotāji, bet tā ir pretruna ar doto, ka kolektīvā ir 18 dejotāji. Tātad kolektīvā ir vismaz četri dejotāji, kam ir vienāds gadu skaits. (Izmantots Dirihlē princips.)

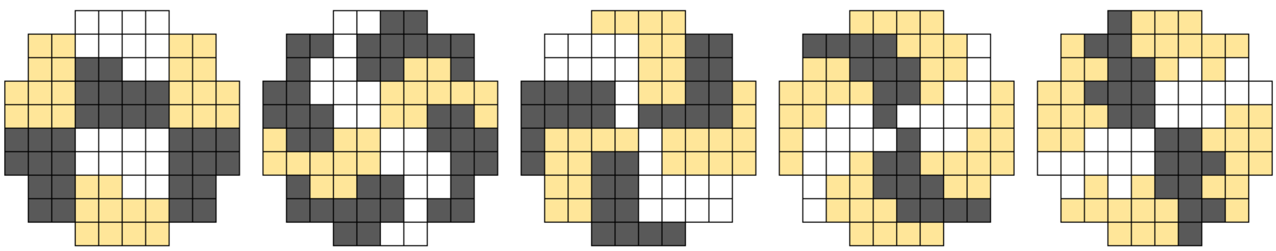
5.3. Sadali 1. att. doto figūru 8 vienādās daļās, tā, lai dalījuma līnijas ietu pa rūtiņu malām!

Piezīme. Daļas var būt pagrieztas vai apmestas otrādi attiecībā viena pret otru. Divas figūras sauc par vienādām, ja tās var uzlikt vienu uz otras tā, ka abas figūras pilnīgi sakrīt.



1. att.

Atrisinājums. Der jebkurš no 2. att. dotajiem sadalījumiem.



2. att.

5.4. Parādi vienu piemēru, kādi naturāli skaitļi var būt ierakstīti burtu vietā, lai katru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa būtu 20.

$$7, a, b, c, d, e, f, 9$$

Atrisinājums. Ir viens vienīgs veids, kā ierakstīt skaitļus: 7; 9; 4; 7; 9; 4; 7; 9. Redzams, ka katri trīs pēc kārtas esoši skaitļi ir 7, 9, 4, kaut kādā secībā, to summa ir 20.

Piezīme. Skaitļus var palīdzēt atrast tālāk aprakstītie spriedumi. No tā, ka $a+b+c=b+c+d$ izriet, ka $a=d$, tātad skaitļi, kas atrodas 3 pozīcijas atstatu ir vienādi. Tātad $7=c=f$ un $a=d=9$, visbeidzot $b=e$ un to vērtību var atrast, izmantojot to, ka $a+b+c=20$.

5.5. Divi spēlētāji pēc kārtas ņem konfektes no konfekšu kaudzes. Katrā gājienā jāpaņem vismaz viena, bet ne vairāk kā septiņas konfektes. Uzvar tas spēlētājs, kurš paņem pēdējo konfekti. Kurš no spēlētājiem (pirmais vai otrais) vienmēr var uzvarēt (neatkarīgi no pretinieka gājieniem), ja sākumā konfekšu kaudzē ir **a)** 64 konfektes, **b)** 2018 konfektes?

Atrisinājums. Pamatosim, ka a) gadījumā vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs, bet b) gadījumā – pirmais spēlētājs.

Vienmēr var uzvarēt tas spēlētājs, pēc kura gājiena atlikušais konfekšu skaits dalās ar 8. Ja konfekšu skaits dalās ar 8 un pretinieks savā gājienā paņem n konfektes ($n=1,2,3,4,5,6$ vai 7), tad, pēc viņa paņemot $(8-n)$ konfektes (tas ir, attiecīgi 7, 6, 5, 4, 3, 2 vai 1 konfekti), konfekšu skaits samazinās par 8 un atlikušais konfekšu skaits atkal dalās ar 8. Tā turpinot, tas ir, pēc katriem diviem gājieniem (viens gājiens katram spēlētājam) samazinot konfekšu skaitu par 8, var noteikti paņemt pēdējo konfekti, tas ir, nodrošināt, ka pēc sava gājiena paliek 0 konfektes.

Tā kā 64 dalās ar 8, tad a) gadījumā vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs, jo viņš varēs nodrošināt, ka pēc viņa gājiena paliek 56, 48, ..., 16, 8, 0 konfektes, bet 2018 nedalās ar 8, tāpēc b) gadījumā vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs, pirmajā gājienā viņam jāņem 2 konfektes (lai atlikušais skaits 2016 dalītos ar 8) un tad tālāk jārīkojas atbilstoši iepriekš aprakstītajai shēmai.

6.1. Parādi vienu piemēru, kādus naturālus skaitļus var ierakstīt burtu a, b, c vietā, lai ir patiesa vienādība

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{4}{5}$$

Atrisinājums. Der jebkurš no variantiem:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{10}{20}+\frac{5}{20}+\frac{1}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5};$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

6.2. Koru finālskatē piedalījās desmit zēnu kori, kopā 291 dalībnieks. Katrs dalībnieks dzied tieši vienā korī.

a) Vai noteikti ir tāds koris, kurā ir tieši 20 dalībnieki?

b) Vai var gadīties, ka ir tāds koris, kurā ir tieši 32 dalībnieki?

c) Vai var apgalvot, ka ir tieši viens tāds koris, kurā ir vismaz 30 dalībnieki?

d) Vai noteikti ir tāds koris, kurā ir vismaz 30 dalībnieki?

Atrisinājums

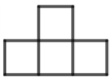
a) Nē, piemēram, varētu gadīties, ka vienā korī ir tieši 30 dalībnieki, bet pārējos deviņos koros – katrā pa 29 dalībniekiem.

b) Jā, piemēram, vienā korī ir tieši 32 dalībnieki, vienā – 19 dalībnieki, bet pārējos astoņos – pa 30 dalībniekiem.

c) Nē, piemēram, varētu gadīties, ka deviņos koros ir pa 30 dalībniekiem, bet pēdējā korī – 21 dalībnieks.

d) Jā, noteikti. Ja katrā korī būtu ne vairāk kā 29 dalībnieki, tad pavisam kopā finālskatē būtu piedalījušies ne vairāk kā $29\cdot 10=290$ dalībnieki, bet tā ir pretruna ar doto, ka piedalījās 291 dalībnieks. Tātad noteikti ir tāds koris, kurā ir vismaz 30 dalībnieki. (Izmantots Dirihlē princips.)

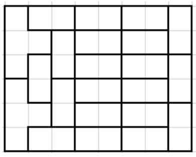
6.3. Vai taisnstūri ar izmēriem 6×8 rūtiņas var pārklāt ar **a)** divām 3. att. dotajām figūrām un 20 figūrām, kādas dotas 4. att.; **b)** vienu 3. att. doto figūru un 22 figūrām, kādas dotas 4. att.? Figūras drīkst pagriezt.



3. att.

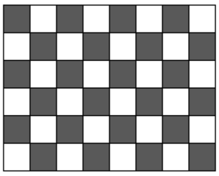
4. att.

Atrisinājums. a) Jā, var, piemēram, skat., 5. att.



5. att.

b) Nē, prasīto izdarīt nevar. Iekrāsosim doto taisnstūri kā šaha galdiņu (skat. 6. att.). Lai kur novietotu 4. att. figūru, tā vienmēr pārklās tieši vienu melnu rūtiņu, tātad 22 tādas figūras kopā pārklās tieši 22 melnas rūtiņas. Ar vienu 3. att. figūru var pārklāt vai nu tieši 3 melnas, vai tieši 1 melnu rūtiņu (skat. 7. att.), tātad kopā ar visām dotajām figūrām būs pārklātas 23 vai 25 melnas rūtiņas, bet taisnstūrī ir 24 melnas rūtiņas. Līdz ar to taisnstūri ar dotajām figūrām pārklāt nav iespējams.



6. att.

7. att.

6.4. Divciparu skaitļa sākumā un beigās pierakstīja ciparu 1. Ieguva četrciparu skaitli, kas ir 23 reizes lielāks nekā sākotnējais divciparu skaitlis. Kāds bija sākotnējais divciparu skaitlis? *Atrodi visus derīgos divciparu skaitļus un pamato, ka citu nav!*

1. atrisinājums. Apzīmējam doto divciparu skaitli ar $\overline{ab}$. Tad jābūt patiesai vienādībai $23 \cdot \overline{ab} = \overline{1ab1}$. Lai reizinājuma pēdējais cipars būtu 1, vienīgā iespēja, ka $b = 7$. Iegūstam $23 \cdot \overline{a7} = \overline{1a71}$. Ievērojam, ka $a > 3$, jo $23 \cdot 37 = 851$, kas nav četrciparu skaitlis. Pārbaudām pārējās iespējamās cipara a vērtības:

- ja $a = 4$, tad $23 \cdot 47 = 1081$ – neder;
- ja $a = 5$, tad $23 \cdot 57 = 1311$ – neder;
- ja $a = 6$, tad $23 \cdot 67 = 1541$ – neder;
- ja $a = 7$, tad $23 \cdot 77 = 1771$ – der;
- ja $a = 8$, tad $23 \cdot 87 = 2001$ – neder, līdz ar to neder arī $a = 9$, jo tad reizinājuma pirmais cipars nav 1.

Tātad vienīgais derīgais divciparu skaitlis ir 77.

2. atrisinājums. Apzīmējam doto divciparu skaitli ar $\overline{ab}$. Tad jābūt patiesai vienādībai $23 \cdot \overline{ab} = \overline{1ab1}$. Lai reizinājuma pēdējais cipars būtu 1, vienīgā iespēja, ka $b = 7$. Iegūstam $23 \cdot \overline{a7} = \overline{1a71}$, ko var pārrakstīt formā

$$23 \cdot (10a + 7) = 1000 + 100a + 71;$$
$$230a + 161 = 1071 + 100a;$$
$$130a = 910;$$
$$a = 7$$

Tātad vienīgais derīgais divciparu skaitlis ir 77.

6.5. Divi spēlētāji pēc kārtas ņem konfektes no konfekšu kaudzes. Katrā gājienā jāpaņem vismaz viena, bet ne vairāk kā septiņas konfektes. Zaudē tas spēlētājs, kuram jāņem pēdējā konfekte. Kurš no spēlētājiem (pirmais vai otrais) vienmēr var uzvarēt (neatkarīgi no pretinieka gājieniem), ja sākumā konfekšu kaudzē ir **a)** 81 konfekte, **b)** 2018 konfektes?

Atrisinājums. Pamatosim, ka a) gadījumā vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs, bet b) gadījumā – pirmais spēlētājs.

Vienmēr var uzvarēt tas spēlētājs, pēc kura gājiena atlikušais konfekšu skaits, dalot ar 8, dod atlikumā 1. Ja konfekšu skaits, dalot ar 8, dod atlikumā 1 un pretinieks savā gājienā paņem n konfektes ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ vai 7), tad, pēc viņa paņemot $(8 - n)$ konfektes (tas ir, attiecīgi 7, 6, 5, 4, 3, 2 vai 1 konfekti), konfekšu skaits samazinās par 8 un atlikušais konfekšu skaits atkal, dalot ar 8, dod atlikumā 1. Tā turpinot, tas ir, pēc katriem

diviem gājieniem (viens gājiens katram spēlētājam) samazinot konfekšu skaitu par 8, spēlētājs noteikti atstās pretiniekam tieši 1 konfekti un līdz ar to nodrošinās sev uzvaru.
Tā kā 81, dalot ar 8, dod atlikumā 1, tad a) gadījumā vienmēr var uzvarēt otrais spēlētājs, jo viņš varēs nodrošināt, ka pēc viņa gājiena paliek 73, 65, ..., 17, 9, 1 konfekte, bet 2018, dalot ar 8, dod atlikumā 2, tāpēc b) gadījumā vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs, pirmajā gājienā viņam jāņem 1 konfekte (lai atlikušais skaits 2017, dalot ar 8, dotu atlikumā 1) un tad tālāk jārīkojas atbilstoši iepriekš aprakstītajai shēmai.

7.1. Četrstāvu mājai ir vairāk nekā 200 logu. Zināms, ka pirmajā stāvā ir nepāra skaits logu, bet katrā no nākamiem stāviem to ir tieši par diviem mazāk nekā stāvu zemāk. Kāds mazākais logu skaits var būt šīs mājas ceturtajā stāvā?

Atrisinājums. Ar x apzīmējam logu skaitu ceturtajā stāvā. Tad kopējais logu skaits ir

$$x+(x+2)+(x+4)+(x+6)>200;$$
$$4x+12>200;$$
$$4x>188;$$
$$x>47$$

Līdz ar to mazākais iespējamais logu skaits 4. stāvā ir 49.

7.2. Maisiņā bija 10 sarkanas, 10 dzeltenas un 10 zaļas lentes. Tautas deju kolektīva astoņas meitenes katra izvēlējās vienu lenti no šī maisiņa.

a) Vai var apgalvot, ka tieši četras meitenes izvēlējās vienādas krāsas lentes?

b) Vai noteikti ir vismaz trīs meitenes, kas izvēlējās vienādas krāsas lentes?

c) Kāds mazākais skaits lenšu būtu jāizņem no maisiņa, lai varētu apgalvot, ka vismaz četras no tām ir vienā krāsā?

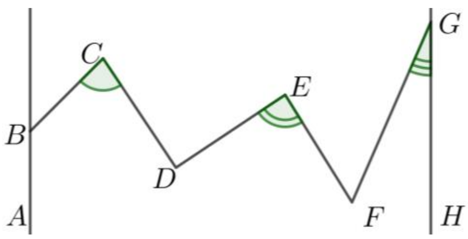
Atrisinājums

a) Nē, piemēram, varētu gadīties, ka 1 meitene izvēlējās sarkanu lenti, 1 meitene – dzeltenu lenti un 6 meitenes – zaļu lenti.

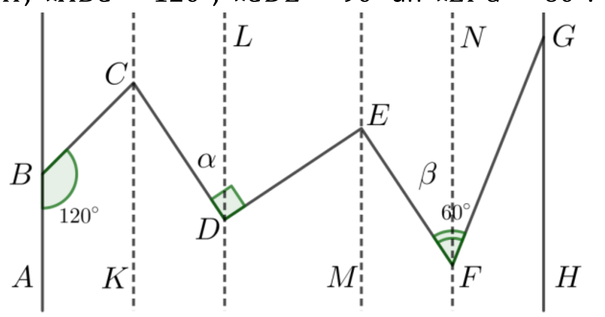
b) Jā, noteikti. Ja katras krāsas lenti būtu izvēlējušās ne vairāk kā 2 meitenes, tad kopā būtu ne vairāk kā $2\cdot 3=6$ meitenes, bet tā ir pretruna ar doto, ka lentes izvēlējās 8 meitenes. Tātad noteikti ir vismaz 3 meitenes, kas izvēlējās vienas krāsas lenti. (Izmantots Dirihlē princips.)

c) Ar deviņām (vai mazāk) lentēm nepietiktu, jo tad varētu gadīties, ka no katras krāsas ir pa 3 lentēm (vai mazāk). Tātad, ja no maisiņa izņemtu 10 lentes, tad pēc Dirihlē principa noteikti vismaz četras no tām būtu vienā krāsā.

7.3. Aprēķināt $\sphericalangle BCD+\sphericalangle DEF+\sphericalangle FGH$ (skat. 8. att.), ja $AB||GH$, $\sphericalangle ABC=120°$, $\sphericalangle CDE=90°$ un $\sphericalangle EFG=60°$.



8. att.



9. att.

Atrisinājums. Novelkam taisnei AB paralēlas taisnes caur punktiem C, D, E un F (skat. 9. att.). Tā kā iekšējo vienpusleņķu summa pie paralēlām taisnēm ir $180°$, tad $\sphericalangle BCK=180°-120°=60°$. Apzīmējam $\sphericalangle CDL=\alpha$, $\sphericalangle EFN=\beta$. Ievērojam, ka $\sphericalangle LDE=90°-\alpha$ un $\sphericalangle NFG=60°-\beta$. Tā kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm ir vienādi, tad $\sphericalangle KCD=\sphericalangle CDL=\alpha$, $\sphericalangle MEF=\sphericalangle EFN=\beta$, $\sphericalangle DEM=\sphericalangle LDE=90°-\alpha$ un $\sphericalangle FGH=\sphericalangle NFG=60°-\beta$. Līdz ar to

$$\sphericalangle BCD+\sphericalangle DEF+\sphericalangle FGH=\sphericalangle BCK+\sphericalangle KCD+\sphericalangle DEM+\sphericalangle MEF+\sphericalangle FGH=$$
$$=60°+\alpha+90°-\alpha+\beta+60°-\beta=210°.$$

7.4. Dots, ka piecciparu skaitlis $\overline{acbba}$ dalās ar 11 un $a > b > c$. Pierādīt, ka var atrast trīs citus piecciparu skaitļus, kas dalās ar 11, ir lielāki nekā $\overline{acbba}$ un veidoti, samainot vietām sākotnējā skaitļa ciparus!

1. atrisinājums. Pārrakstām doto skaitli formā

$$\overline{acbba} = 10000a + 1000c + 100b + 10b + a = 9999a + 2a + 1001c - c + 110b;$$
$$\overline{acbba} = 11 \cdot 99a + 11 \cdot 91c + 11 \cdot 10b + 2a - c$$

Tā kā pēdējās vienādības kreisā puse dalās ar 11, tad arī vienādības labajai pusei ir jādalās ar 11. Labās puses pirmie trīs saskaitāmie dalās ar 11, tātad arī $(2a - c)$ dalās ar 11.

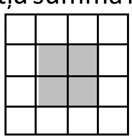
Aplūkojam skaitļus $\overline{acabb}$, $\overline{abbca}$ un $\overline{abacb}$. Tie visi ir lielāki nekā dotais skaitlis (jo $a > b > c$) un tie dalās ar 11, jo skaitli

- $\overline{acabb}$ var izteikt formā
$$\overline{acabb} = 10100a + 1000c + 11b = 10098a + 1001c + 11b + 2a - c =$$
$$= 11 \cdot 918a + 11 \cdot 91c + 11b + (2a - c)$$
kur katrs saskaitāmais dalās ar 11;
- $\overline{abbca}$ var izteikt formā
$$\overline{abbca} = 10001a + 1100b + 10c = 9999a + 1100b + 11c + 2a - c =$$
$$= 11 \cdot 909a + 11 \cdot 100b + 11c + (2a - c)$$
kur katrs saskaitāmais dalās ar 11;
- $\overline{abacb}$ var izteikt formā
$$\overline{abacb} = 10100a + 1001b + 10c = 10098a + 1001b + 11c + 2a - c =$$
$$= 11 \cdot 918a + 11 \cdot 91b + 11c + (2a - c)$$
kur katrs saskaitāmais dalās ar 11.

2. atrisinājums. Skaitlis dalās ar 11, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11. Dotais skaitlis dalās ar 11, tāpēc $(a + b + a) - (c + b) = 2a - c$ dalās ar 11.

Aplūkojam skaitļus $\overline{acabb}$, $\overline{abbca}$ un $\overline{abacb}$. Tie visi ir lielāki nekā dotais skaitlis (jo $a > b > c$) un tie dalās ar 11, jo ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība ir $2a - c$, kas dalās ar 11.

7.5. Visi naturālie skaitļi no 1 līdz 16 ierakstīti tabulas (skat. 10. att.) rūtiņās, katrā rūtiņā tieši viens skaitlis. Visās tabulas rindās, kolonnās un uz abām galvenajām diagonālēm rūtiņās ierakstīto skaitļu summas ir vienādas. Pierādīt, ka iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 34.



10. att.

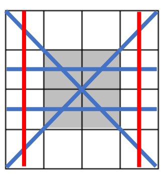
Atrisinājums. Tā kā rindās ierakstīto skaitļu summas ir vienādas, tad katrā rindā ierakstīto skaitļu summa ir

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16}{4} = 2 \cdot 17 = 34$$

Iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summu apzīmējam ar S, otrajā un trešajā rindā ierakstīto skaitļu summu, pirmajā un ceturtajā kolonnā ierakstīto skaitļu summu un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summu apzīmējam attiecīgi ar $R_2, R_3, K_1, K_4, D_1, D_2$.

Tā kā $D_1 = D_2 = R_2 = R_3 = K_1 = K_4 = 34$, tad (skat. 11. att.)

$$S = \frac{1}{2}(D_1 + D_2 + R_2 + R_3 - K_1 - K_4) = \frac{1}{2} \cdot 68 = 34$$



11. att.

8.1. Zināms, ka a ir tāds reāls skaitlis, ka $a+\frac{1}{a}=3$. Aprēķināt **a)** $a^2+\frac{1}{a^2}+2$; **b)** $a^4+\frac{1}{a^4}$

Atrisinājums. a) Redzams, ka $a^2+\frac{1}{a^2}+2=a^2+2\cdot a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3^2=9$.

b) No a) gadījuma izriet, ka $a^2+\frac{1}{a^2}=7$. Līdz ar to iegūstam, ka

$$a^4+\frac{1}{a^4}=a^4+2\cdot a^2\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}-2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=49-2=47$$

8.2. Maisiņā ir sarkanas, dzeltenas un zaļas lentes. Katra no meiteņu kora 29 dalībniecēm izvēlējās tieši trīs no šīm lentēm (ne obligāti dažādās krāsās).

a) Vai noteikti ir tāds lenšu krāsu komplekts, ko izvēlējās tieši divas meitenes?

b) Vai noteikti ir tāds lenšu krāsu komplekts, ko izvēlējās vismaz trīs meitenes?

c) Kāds mazākais skaits no dalībniecēm jāizvēlas, lai starp tām noteikti būtu trīs meitenes, kas izvēlējās vienu un to pašu lenšu krāsu komplektu?

Atrisinājums. Ievērojam, ka iespējami 10 dažādi lenšu krāsu komplekti:

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
Sarkana	3	0	0	2	2	1	0	1	0	1
Dzeltena	0	3	0	1	0	2	2	0	1	1
Zaļa	0	0	3	0	1	0	1	2	2	1

a) Nē, piemēram, varētu gadīties, ka pirmo komplektu izvēlas 4 meitenes, otro komplektu – 1 meitene, bet pārējos astoņus komplektus – pa 3 meitenēm.

b) Jā, noteikti. Ja katru komplektu būtu izvēlējušās ne vairāk kā 2 meitenes, tad kopā būtu ne vairāk kā $2\cdot 10=20$ meitenes, bet tā ir pretruna ar doto, ka lentas izvēlējās 29 meitenes. Tātad noteikti ir vismaz 3 meitenes, kas izvēlējās vienu un to pašu lenšu krāsu komplektu. (Izmantots Dirihlē princips.)

c) Ja izvēlētos 20 meitenes (vai mazāk), tad varētu gadīties, ka katru komplektu ir izvēlējušās 2 meitenes (vai mazāk). Tātad, ja izvēlētos 21 meiteni, tad pēc Dirihlē principa noteikti būtu trīs meitenes, kas izvēlējās vienu un to pašu lenšu krāsu komplektu.

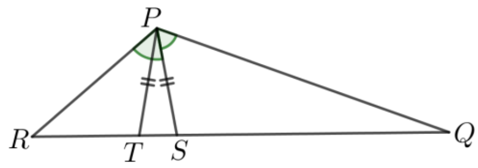
8.3. Dots trijstūris PQR, kurā $\sphericalangle PQR=20°$ un $\sphericalangle PRQ=40°$. No virsotnes P novilktā bisektrise krusto malu QR punktā S, nogriežņa PS garums ir 2. Par cik mala QR ir garāka nekā PQ?

Atrisinājums. Tā kā PS ir leņķa $\sphericalangle QPR$ bisektrise un trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°$, tad $\sphericalangle RPS=\sphericalangle SPQ=\frac{1}{2}(180°-20°-40°)=60°$ (skat. 12. att.).

No ΔPSQ iegūstam, ka $\sphericalangle PSQ=180°-\sphericalangle PQR-\sphericalangle SPQ=180°-20°-60°=100°$. Novelkam $PT=2$, kur T atrodas uz malas QR. Trijstūris TPS ir vienādsānu un $\sphericalangle PST=\sphericalangle PTS=80°$ un $\sphericalangle TPS=20°$. Trijstūris RTP ir vienādsānu, jo $\sphericalangle PRQ=40°$ un $\sphericalangle RPT=\sphericalangle RPS-\sphericalangle TPS=60°-20°=40°$. Tātad $PT=TR=2$. Tā kā $\sphericalangle QTP=\sphericalangle TPQ=80°$, tad arī trijstūris PQT ir vienādsānu un $PQ=QT$.

Esam ieguvuši, ka $QR=QT+TR=PQ+2$ jeb mala QR ir par 2 garāka nekā PQ.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī, atliekot uz QR tādu punktu T, ka $PQ=QT$. Pēc tam, spriežot līdzīgi, kā dotajā risinājumā, iegūst vajadzīgo.



12. att.

8.4. No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru izmantojot vienu reizi, izveidoti trīs trīsciparu skaitļi. Ar kādu lielāko nuļļu skaitu var beigties šo trīs skaitļu summa?

Atrisinājums. Lielākais nuļļu skaits ir 2. To var iegūt, piemēram, $195+762+843=1800$.

Pierādīsim, ka ar vairāk kā 2 nullēm skaitļu summa nevar beigties.

Ja izveidotos skaitļus apzīmē ar $\overline{abc}$, $\overline{def}$ un $\overline{ghi}$, tad to summa izsakāma kā

$$S=(a+d+g)\cdot 100+(b+e+h)\cdot 10+c+f+i=$$
$$=99(a+d+g)+9(b+e+h)+a+b+c+d+e+f+g+h+i$$

Ņemot vērā, ka visu izmantoto ciparu summa ir 45, iegūstam

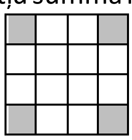
$$S=99(a+d+g)+9(b+e+h)+45$$

Tātad izveidoto skaitļu summa S dalās ar 9, jo katrs saskaitāmais dalās ar 9.

Trīs trīsciparu skaitļu summa ir mazāka nekā 3000, jo katrs saskaitāmais ir mazāks nekā 1000. Vienīgie divi skaitļi ar trīs nullēm beigās, kas mazāki nekā 3000, ir 1000 un 2000, kas nedalās ar 9. Tāpēc summa S nevar beigties ar trīs nullēm.

Piezīme. Vajadzīgo piemēru var atrast, piemeklējot ciparus, sākot ar skaitļu pēdējo ciparu.

8.5. Visi naturālie skaitļi no 1 līdz 16 ierakstīti tabulas (skat. 13. att.) rūtiņās, katrā rūtiņā tieši viens skaitlis. Visās tabulas rindās, kolonnās un uz abām galvenajām diagonālēm rūtiņās ierakstīto skaitļu summas ir vienādas. Pierādīt, ka iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir 34.



13. att.

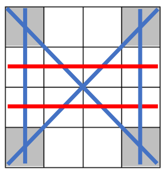
Atrisinājums. Tā kā rindās ierakstīto skaitļu summas ir vienādas, tad katrā rindā ierakstīto skaitļu summa ir

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16}{4}=2\cdot 17=34$$

Iekrāsotajās rūtiņās ierakstīto skaitļu summu apzīmējam ar S, otrajā un trešajā rindā ierakstīto skaitļu summu, pirmajā un ceturtajā kolonnā ierakstīto skaitļu summu un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summu apzīmējam attiecīgi ar $R_2, R_3, K_1, K_4, D_1, D_2$.

Tā kā $D_1=D_2=R_2=R_3=K_1=K_4=34$, tad (skat. 14. att.)

$$S=\frac{1}{2}(D_1+D_2+K_1+K_4-R_2-R_3)=\frac{1}{2}\cdot 68=34$$



14. att.