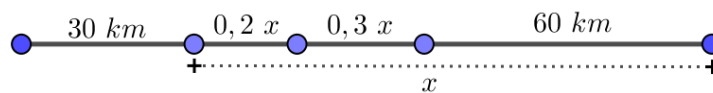


Latvijas 68. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi 9.-12. klase

- 9.1.** Jaunieši devās četru dienu pārgājienā gar jūru. Pirmajā dienā tie nogāja 30 km. Otrajā dienā tie ar jahtu nobrauca 20% no atlikušā ceļa. Trešajā dienā jaunieši atkal gāja kājām, noejot 1,5 reizes lielāku attālumu nekā viņi brauca ar jahtu. Ceturtajā dienā atlikušo ceļu 1,5 stundās jaunieši veica ar kvadricikliem, kuru ātrums ir 40 km/h. Cik kilometru garš bija maršruts?

Atrisinājums. Atlikušo maršruta garumu, kas palicis, kad noieti pirmie 30 km, apzīmējam ar x (skat. 1. att.). Tad ar jahtu pa jūru jaunieši brauca $0,2x$ km, bet pēc tam ar kājām gāja vēl $1,5 \cdot 0,2x = 0,3x$ km. Ar kvadricikliem tie veica $1,5 \cdot 40 = 60$ km. Iegūstam vienādojumu $0,2x + 0,3x + 60 = x$ jeb $x = 120$. Tātad kopējais maršruta garums bija $x + 30 = 120 + 30 = 150$ kilometri.



1. att.

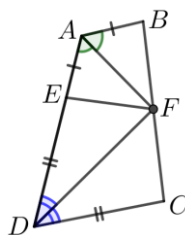
- 9.2.** Skolas ēdnīcas pusdienu piedāvājumā ir divas dažādas zupas, divi dažādi pamatēdieni un divi dažādi deserti. Pusdienās aizgāja 30 vienas klases skolēni, no katra ēdiena veida (zupa, pamatēdiens, deserts) katrs skolēns izvēlējās ne vairāk kā vienu ēdiena, pie tam nebija tāda skolēna, kurš neēda vispār neko. Vai noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu?

Atrisinājums. Pamatosim, ka noteikti ir divi tādi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu. Ievērojam, ka katra veida ēdiena var vai nu neiekļaut komplektā, vai izvēlēties vienu no diviem tā veidiem, tātad katram ēdiena veidam ir 3 dažādas iespējas. Tā kā katrs skolēns izvēlējās vismaz vienu no piedāvātajiem ēdieniem (neder variants, ka no katra ēdiena veida neizvēlas neko), tad ir iespējams izveidot $3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 26$ dažādus pusdienu komplektus. **Ja katru no šiem komplektiem būtu izvēlējies ne vairāk kā viens skolēns, tad pusdienās būtu aizgājuši ne vairāk kā 26 skolēni, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.**

Piezīme. Treknrakstā izceltā teksta vietā var būt, piemēram, arī šāds spriedums: tā kā pusdienās aizgāja 30 skolēni un $30 > 26$, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.

- 9.3.** Četrstūra $ABCD$ malu AB un CD garumu summa ir vienāda ar malas AD garumu. Leņķu DAB un CDA bisektrišu krustpunkts F atrodas uz malas BC . Pierādīt, ka punkts F ir BC viduspunkts!

Atrisinājums. Tā kā $AD = AB + CD$, tad uz malas AD ir tāds punkts E , ka $AB = AE$ un $ED = DC$ (skat. 2. att.). Ievērojam, ka $\triangle BAF = \triangle EAF$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $AB = AE$, $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF$ (bisektrises definīcija) un AF – kopīga mala, un $\triangle FED = \triangle FCD$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $\sphericalangle EDF = \sphericalangle CDF$; $ED = DC$ un DF – kopīga. Vienādos trijstūros atbilstošās malas ir vienādas, tāpēc $BF = EF = CF$. Tātad punkts F atrodas vienādā attālumā no B un C , līdz ar to punkts F ir BC viduspunkts.



2. att.

9.4. Vai var atrast tādus veselus skaitļus x un y , ka $20x^3 - 17y^2 + 1 = 2018$?

1. **atrisinājums.** Pierādīsim, ka tādus skaitļus nevar atrast. Pārveidojam doto vienādojumu:

$$20x^3 - 2000 = 17 + 17y^2;$$

$$20(x^3 - 100) = 17(1 + y^2).$$

Ievērojam, ka vienādojuma kreisā puse ir pāra skaitlis. Lai vienādība būtu patiesa, arī vienādojuma labā pusei jābūt pāra skaitlim, līdz ar to y jābūt nepāra skaitlim. Ņemot $y = 2k + 1$, kur $k \in \mathbb{Z}$, iegūstam

$$20(x^3 - 100) = 17(2 + 4k^2 + 4k).$$

Tā kā vienādības kreisā puse dalās ar četri, bet labā puse nedalās, tad vienādojumam nav atrisinājuma veselos skaitļos.

2. **atrisinājums.** Pierādīsim, ka tādus skaitļus nevar atrast. Pārveidojam doto vienādojumu:

$$20x^3 - 2000 = 17 + 17y^2;$$

$$20(x^3 - 100) = 17(1 + y^2).$$

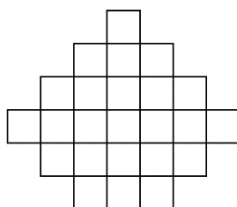
Ievērojam, ka vienādojuma kreisā puse dalās ar 4.

Pamatosim, ka vienādojuma labā puse nedalās ar 4, tas ir, pamatosim, ka $1 + y^2$ nedalās ar 4. Apskatām, kādu atlikumu var dot skaitlis $1 + y^2$, dalot ar 4:

- ja y dalās ar 4, tas ir, $y = 4k$, kur $k \in \mathbb{Z}$, tad $1 + y^2 = 1 + 16k^2$, kas nedalās ar 4;
- ja y , dalot ar 4, dod atlikumā 1, tas ir, $y = 4k + 1$, kur $k \in \mathbb{Z}$, tad $1 + y^2 = 1 + 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 2$, kas nedalās ar 4;
- ja y , dalot ar 4, dod atlikumā 2, tas ir, $y = 4k + 2$, kur $k \in \mathbb{Z}$, tad $1 + y^2 = 1 + 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k) + 5$, kas nedalās ar 4;
- ja y , dalot ar 4, dod atlikumā 3, tas ir, $y = 4k + 3$, kur $k \in \mathbb{Z}$, tad $1 + y^2 = 1 + 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k) + 10$, kas nedalās ar 4.

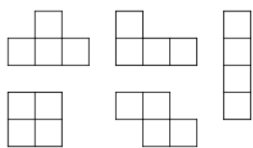
Tā kā vienādojuma kreisā puse dalās ar 4, bet labā nedalās, tad esam pierādījuši, ka nevar atrast tādus veselus skaitļus x un y , lai pastāvētu vienādība.

9.5. Dota figūra, kuras laukums ir 24 rūtiņas (skat. 3. att.). Griezot pa rūtiņu līnijām, tā sagriezta sešās vienlielās daļās (katras daļas laukums ir 4 rūtiņas). Noteikt, kāds ir mazākais iespējamais griezumta līniju kopgarums, pieņemot, ka rūtiņas malas garums ir viena vienība!

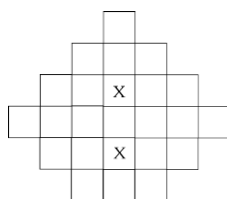


3. att.

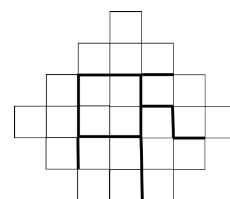
Atrisinājums. Dotās figūras perimetrs ir 26 vienības. Iegūto sešu daļu perimetrus apzīmējam ar $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ un aplūkojam summu $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$. Šajā summā katrs griezumta posms ir ieskaitīts divas reizes, bet katras daļas ārējās malas posms – vienu reizi. Tad griezumta līniju kopgarumu var izteikt kā $\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 - 26)$. Tātad nepieciešams minimizēt iegūto sešu daļu perimetru summu. Pavisam ir piecas dažādas figūras, kas sastāv no četrām rūtiņām (skat. 4. att.). Visām figūrām, izņemot 2×2 kvadrātu, perimetrs ir 10 vienības, bet kvadrāta perimetrs ir 8 vienības. Pamatosim, ka no dotās figūras var izgriezt ne vairāk kā divus 2×2 kvadrātus. Kvadrāts 2×2 var atrasties tikai tajās vietās, kur kādā no kvadrāta rūtiņām atrodas "X" (skat. 5. att.). Ja kvadrātu novieto citās vietās, tad tas atšķēļ vienu atsevišķu rūtiņu. Tātad no dotās figūras var izgriezt ne vairāk kā divus 2×2 kvadrātus. Līdz ar to mazākais iespējamais griezumta līniju kopgarums ir $(2 \cdot 8 + 4 \cdot 10 - 26) : 2 = 15$, to var iegūt, piemēram, kā parādīts 6. att.



4. att.



5. att.



6. att.

- 10.1.** Uz gara baļķa 600 cm attālumā viens no otra atrodas gliemezis un skudra. Ja tie pārvietotos viens otram pretī, tad tie sastaptos pēc 5 minūtēm. Ja tie kustētos vienā virzienā ar tiem pašiem ātrumiem, tad skudra panāktu gliemezi pēc 20 minūtēm. Noteikt, cik centimetrus minūtē veic skudra un cik – gliemezis!

Atrisinājums. Skudras ātrumu apzīmējam ar x un gliemeža – ar y . Tad iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 5x + 5y = 600 \\ 20x = 20y + 600 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} x + y = 120 \\ x - y = 30 \end{cases}$$

Saskaitot pēdējās sistēmas vienādojumus, iegūstam $2x = 150$ jeb $x = 75$ cm/min un $y = 45$ cm/min.

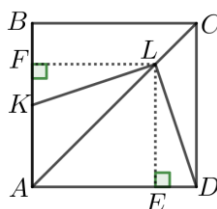
- 10.2.** Skolas ēdnīcas pusdienu piedāvājumā ir divas dažādas zupas, divi dažādi pamatēdieni un divi dažādi deserti. Pusdienās aizgāja 200 skolēni, no katra ēdienu veida (zupa, pamatēdiens, deserts) katrs skolēns izvēlējās ne vairāk kā vienu ēdienu, pie tam nebija tāda skolēna, kurš neēda vispār neko. Kāds ir lielākais skaits skolēnu, kas noteikti pasūtīja vienu un to pašu?

Atrisinājums. Pamatosim, ka lielākais skolēnu skaits, kas noteikti pasūtīja vienu un to pašu, ir 8. Ievērojam, ka katra veida ēdienu var vai nu neiekļaut komplektā, vai izvēlēties vienu no diviem tā veidiem, tātad katram ēdiena veidam ir 3 dažādas iespējas. Tā kā katrs skolēns izvēlējās vismaz vienu no piedāvātajiem ēdieniem (neder variants, ka no katra ēdiena veida neizvēlas neko), tad ir iespējams izveidot $3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 26$ dažādus pusdienu komplektus. **Ja katru no šiem komplektiem būtu izvēlējušies ne vairāk kā 7 skolēni, tad pusdienās būtu aizgājuši ne vairāk kā $7 \cdot 26 = 182$ skolēni, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad noteikti ir 8 skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.** Nevar apgalvot, ka vairāk kā 8 skolēni pasūtīja vienu un to pašu, jo ir iespējams, ka pirmos 18 no 26 dažādajiem pusdienu komplektiem izvēlējās pa 8 skolēniem un atlikušos 8 pusdienu komplektus – pa 7 skolēniem (tas ir, $18 \cdot 8 + 8 \cdot 7 = 200$).

Piezīme. Treknrakstā izceltā teksta vietā var būt, piemēram, arī šāds spriedums: tā kā skolēnu skaits ir $200 = 7 \cdot 26 + 18$, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir 8 skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.

- 10.3.** Punkts K ir kvadrāta $ABCD$ malas AB viduspunkts. Uz diagonāles AC atlikts tāds punkts L , ka $AL : LC = 3 : 1$. Pierādīt, ka $\sphericalangle KLD = 90^\circ$.

Atrisinājums. No punkta L pret malām AB un AD novelkam attiecīgi perpendikulus LF un LE (skat. 7. att.). Simetrijas dēļ $LF = LE$. Tā kā $AL : LC = 3 : 1$, tad pēc Talesa teorēmas $ED = BF = \frac{1}{4}AB$. Līdz ar to $FK = BK - BF = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}AB$ un $FK = ED$. Tātad $\triangle LFK = \triangle LED$ pēc pazīmes $m\ell m$ un $\sphericalangle FLK = \sphericalangle ELD$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Ievērojam, ka $\sphericalangle KLD = \sphericalangle KLE + \sphericalangle ELD = \sphericalangle KLE + \sphericalangle FLK = \sphericalangle FLE = 90^\circ$.



7. att.

Piezīme. Iegūt prasīto var arī aprēķinot, ka $KD = \sqrt{\frac{5a}{4}}$ un $KL = LD = \sqrt{\frac{5a}{8}}$, kur a – kvadrāta malas garums, un izmantojot Pitagora teorēmas apgriezto teorēmu.

- 10.4.** No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru izmantojot divas reizes, izveidoti trīs sešciparu skaitļi. Ar kādu lielāko nulļu skaitu var beigties trīs izveidoto skaitļu summa?

Atrisinājums. Lielākais nulļu skaits ir 5. To var iegūt, piemēram, $257899 + 327686 + 314415 = 900000$. Pierādīsim, ka ar vairāk kā 5 nulļiem skaitļu summa nevar beigties.

Ja izveidotos skaitļus apzīmē ar $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6}$ un $\overline{c_1c_2c_3c_4c_5c_6}$, tad to summa izsakāma kā $S = (a_1 + b_1 + c_1) \cdot 10^5 + (a_2 + b_2 + c_2) \cdot 10^4 + (a_3 + b_3 + c_3) \cdot 10^3 + (a_4 + b_4 + c_4) \cdot 10^2 + (a_5 + b_5 + c_5) \cdot 10 + (a_6 + b_6 + c_6)$

Ņemot vērā, ka visu izmantoto ciparu summa ir $45 \cdot 2 = 90$, iegūstam

$$\begin{aligned} S &= 99999(a_1 + b_1 + c_1) + 9999(a_2 + b_2 + c_2) + 999(a_3 + b_3 + c_3) + 99(a_4 + b_4 + c_4) + 9(a_5 + b_5 + c_5) \\ &\quad + (a_6 + b_6 + c_6) \\ &= 99999(a_1 + b_1 + c_1) + 9999(a_2 + b_2 + c_2) + 999(a_3 + b_3 + c_3) + 99(a_4 + b_4 + c_4) \\ &\quad + 9(a_5 + b_5 + c_5) + 90 \end{aligned}$$

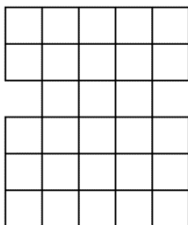
Tāpat izveidoto skaitļu summa S dalās ar 9.

Trīs sešciparu skaitļu summa ir mazāka nekā 3 000 000, jo katrs saskaitāmais ir mazāks nekā 1 000 000. Vienīgie divi skaitļi ar sešām nullēm beigās, kas mazāki nekā 3 000 000, ir 1 000 000 un 2 000 000, kas nedalās ar 9. Tāpēc summa S nevar beigties ar sešām nullēm.

Piezīmes. 1) Der arī $493862 + 511382 + 794756 = 1800000$ un $921478 + 925176 + 853346 = 2700000$.

2) Vajadzīgo piemēru var atrast, piemeklējot ciparus, sākot ar skaitļu pēdējo ciparu.

- 10.5.** Dota figūra, kuras laukums ir 28 rūtiņas (skat. 8. att.). Griezot pa rūtiņu līnijām, tā sagriezta septiņās vienlielās daļās (katras daļas laukums ir 4 rūtiņas). Noteikt, kāds ir mazākais iespējamais griezumuma līniju kopgarums, pieņemot, ka rūtiņas malas garums ir viena vienība!

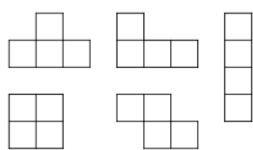


8. att.

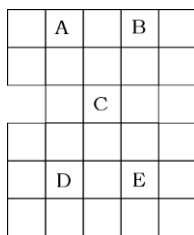
Atrisinājums. Dotās figūras perimetrs ir 26 vienības. Iegūto septiņu daļu perimetrus apzīmējam ar $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ un aplūkojam summu $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7$. Šajā summā katrs griezumuma posms ir ieskaitīts divas reizes, bet katras daļas ārējais posms – vienu reizi. Tad griezumuma līniju kopgarumu var izteikt kā $\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 - 26)$. Tāpat jācenšas minimizēt iegūto septiņu daļu perimetru summu. Pavisam ir piecas dažādas figūras, kas sastāv no četrām rūtiņām (skat. 9. att.). Visām figūrām, izņemot 2×2 kvadrātu, perimetrs ir 10 vienības, bet kvadrāta perimetrs ir 8 vienības.

Pamatosim, ka dotajā laukumā iespējams izvietot ne vairāk kā četrus 2×2 kvadrātus. Katrs 2×2 rūtiņu kvadrāts satur vienu rūtiņu, kas atzīmēta ar burtu (skat. 10. att.), tāpēc no dotās figūras nevar izgriezt vairāk kā piecus kvadrātus. Pieņemsim, ka viens no kvadrātiem satur rūtiņu "C". Ja "C" ir 2×2 kvadrāta apakšējās rindas rūtiņa, tad šis kvadrāts neļauj izgriezt vienu no kvadrātiem ar rūtiņu augšējā rindā ("A" vai "B"). Ja "C" ir 2×2 kvadrāta augšējās rindas rūtiņa, tad, izgriežot kvadrātus, kas satur "A" vai "B", tiktu norobežots divu rūtiņu liels laukums. Tāpat no dotās figūras var izgriezt ne vairāk kā četrus 2×2 kvadrātus.

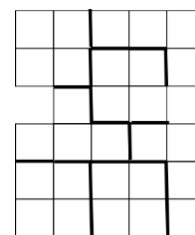
Līdz ar to mazākais iespējamais griezumuma līniju kopgarums ir $(4 \cdot 8 + 3 \cdot 10 - 26) : 2 = 18$, to var iegūt, piemēram, kā parādīts 11. att.



9. att.



10. att.



11. att.

- 11.1.** Spīdolai ir 482 bildes un divi vienādi fotoalbumi. Pirmā albuma katrā lapā viņa ielīmēja tieši 21 bildi. Ja otrā albuma katrā lapā viņa ielīmētu tieši 19 bildes, tad lapu pietrūktu, savukārt, ja katrā lapā viņa ielīmētu tieši 23 bildes, tad vismaz viena lapa paliktu tukša. Cik lapu ir fotoalbumā?

Atrisinājums. Apzīmējam ar x lapu skaitu katrā fotoalbumā. Tad bilžu skaits, kas Spīdolai jāielīmē otrajā fotoalbumā, ir $(482 - 21x)$. Iegūstam nevienādību sistēmu:

$$\begin{cases} 19x < 482 - 21x \\ 23(x - 1) \geq 482 - 21x \end{cases} \text{ jeb } \begin{cases} x < \frac{482}{40} = 12 \frac{2}{40} \\ x \geq \frac{505}{44} = 11 \frac{21}{44} \end{cases}$$

Tā kā lapu skaits ir naturāls skaitlis, tad fotoalbumā ir 12 lapas.

Piezīme. Ja sistēmas otrā nevienādība ir $23x > 482 - 21x$, tad iegūst, ka $x = 11$ vai $x = 12$, bet vērtība $x = 11$ neder, jo tad albumā nepaliek vismaz viena tukša lapa.

- 11.2.** Sporta zālē trenējas 32 cilvēki, kuri visi ir vismaz 21 gadu veci. Pierādīt, ka no šiem cilvēkiem var atrast divus tādus, kuriem ir vairāk nekā 30 gadi vai 4 tādus, kuru gadu skaits ir vienāds!

1. atrisinājums. Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda, tas ir, nav divu cilvēku, kuriem ir vairāk kā 30 gadi un nav četru cilvēku, kuriem ir vienāds gadu skaits. Sadalām cilvēkus grupās pēc to gadu skaita: $\{21\}; \{22\}; \{23\}; \dots; \{29\}; \{30\}; \{\text{vairāk nekā } 30\}$. Tad pirmajās 10 grupās katrā ir ne vairāk kā 3 cilvēki un pēdējā – ne vairāk kā viens cilvēks. Tātad sporta zālē nav vairāk kā $3 \cdot 10 + 1 = 31$ cilvēks – pretruna. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka var atrast divus tādus cilvēkus, kuriem ir vairāk nekā 30 gadi vai 4 tādus, kuru gadu skaits ir vienāds.

2. atrisinājums. Sadalām cilvēkus grupās pēc to gadu skaita: $\{21\}; \{22\}; \{23\}; \dots; \{29\}; \{30\}; \{\text{vairāk nekā } 30\}$. Ja pēdējā grupā ir vismaz divi cilvēki, tad prasītais izpildās.

Ja pēdējā grupā ir mazāk nekā divi cilvēki, tad pa atlikušajām grupām jāsadala vismaz 31 cilvēks. Tā kā ir 10 grupas un vismaz $31 = 3 \cdot 10 + 1$ cilvēks, tad pēc Dirihlē principa kādā no šīm grupām ir vismaz 4 cilvēki, tātad tiem gadu skaits ir vienāds.

- 11.3.** Trapeces $ABCD$ pamatu AB un CD garumu summa ir vienāda ar sānu malas AD garumu. Pierādīt, ka leņķu DAB un CDA bisektrises krustojas BC viduspunktā!

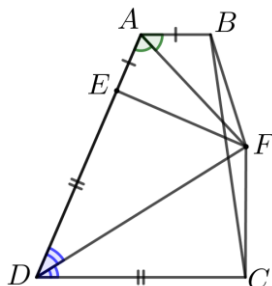
Atrisinājums. Bisektrišu krustpunktu apzīmējam ar F . Ir jāpierāda, ka F atrodas uz BC , un arī, ka $FB = FC$.

Pierādīsim, ka $FB = FC$. Uz AD izvēlamies tādu punktu E , ka $EA = AB$, tad $DE = DC$ (jo $AE + ED = AD = AB + DC$). Tad $\triangle AEF = \triangle ABF$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF$; $AB = AE$ un AF – kopīga un $\triangle EDF = \triangle CDF$ pēc pazīmes $m\ell m$, jo $\sphericalangle EDF = \sphericalangle CDF$; $ED = DC$ un DF – kopīga. Tā kā vienādos trijstūros attiecīgās malas ir vienādas, tad $BF = EF = CF$. Tātad punkts F atrodas vienādā attālumā no B un C .

Atliek pierādīt, ka F atrodas uz BC . Apskatot četrstūrus $ABFE$ un $EFCD$ un izmantojot, ka četrstūra iekšējo leņķu summa ir 360° un ka trapeces sānu malas pieleņķu summa ir 180° , iegūstam

$$\begin{aligned} \sphericalangle BFC &= \sphericalangle BFE + \sphericalangle EFC = \\ &= (360^\circ - \sphericalangle ABF - \sphericalangle BAE - \sphericalangle AEF) + (360^\circ - \sphericalangle FED - \sphericalangle EDC - \sphericalangle DCF) = \\ &= 720^\circ - (\sphericalangle ABF + \sphericalangle DCF) - (\sphericalangle BAE + \sphericalangle EDC) - (\sphericalangle AEF + \sphericalangle FED) = \\ &= 720^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

Esam ieguvuši, ka $\sphericalangle BFC$ ir izstiepts leņķis, līdz ar to F atrodas uz BC .



12. att.

11.4. No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, katru izmantojot divas reizes, izveidoja vienu septiņciparu, vienu sešciparu un vienu piecciparu skaitli. Ar kādu lielāko nulļu skaitu var beigties trīs izveidoto skaitļu summa?

Atrisinājums. Lielākais nulļu skaits ir 6. To var iegūt, piemēram, $8514789 + 421679 + 63532 = 9000000$.

Pierādīsim, ka ar vairāk kā 6 nulļiem skaitļu summa nevar beigties.

Izveidotos skaitļus apzīmējam ar $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6}$ un $\overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$, tad to summa izsakāma kā $S = a_1 \cdot 10^6 + (a_2 + b_1) \cdot 10^5 + (a_3 + b_2 + c_1) \cdot 10^4 + (a_4 + b_3 + c_2) \cdot 10^3 + (a_5 + b_4 + c_3) \cdot 10^2 + (a_6 + b_5 + c_4) \cdot 10 + (a_7 + b_6 + c_5)$;

Ņemot vērā, ka visu izmantoto ciparu summa ir $45 \cdot 2 = 90$, iegūstam

$$\begin{aligned} S &= 999999a_1 + 99999(a_2 + b_1) + 9999(a_3 + b_2 + c_1) + 999(a_4 + b_3 + c_2) + 99(a_5 + b_4 + c_3) + \\ &+ 9(a_6 + b_5 + c_4) + (a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2 + a_3 + b_3 + c_3 + a_4 + b_4 + c_4 + a_5 + b_5 + c_5 + \\ &+ a_6 + b_6 + a_7) = \\ &= 999999a_1 + 99999(a_2 + b_1) + 9999(a_3 + b_2 + c_1) + 999(a_4 + b_3 + c_2) + 99(a_5 + b_4 + c_3) + \\ &+ 9(a_6 + b_5 + c_4) + 90. \end{aligned}$$

Tātad visu izveidoto skaitļu summa dalās ar 9.

Septiņciparu, sešciparu un piecciparu skaitļu summa ir mazāka nekā $10\,000\,000 + 1\,000\,000 + 100\,000 = 11\,100\,000$ un vienīgais skaitlis ar septiņām nulļiem beigās, kas ir mazāks nekā $11\,100\,000$, ir $10\,000\,000$, kas nedalās ar 9. Tāpēc summa S nevar beigties ar septiņām nulļiem.

Piezīme. Vajadzīgo piemēru var atrast, piemeklējot ciparus, sākot ar skaitļu pēdējo ciparu.

11.5. Pierādīt, ka $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \geq 10abcd$ visiem reāliem skaitļiem a, b, c, d .

1. atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\begin{aligned} &a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd + (a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2) + (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + \\ &+ (b^2c^2 - 2abcd + d^2a^2) \geq 0 \\ &(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (c^4 - 2c^2d^2 + d^4) + (2a^2b^2 + 2c^2d^2 - 4abcd) + (ab - cd)^2 + (ac - bd)^2 + \\ &+ (bc - da)^2 \geq 0 \\ &(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 + (ab - cd)^2 + (ac - bd)^2 + (bc - da)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tā kā katrs saskaitāmais ir nenegatīvs, tad pēdējā nevienādība ir patiesa un arī dotā nevienādība ir patiesa.

2. atrisinājums. Izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisku, novērtējam dotās nevienādības kreiso pusi:

$$\begin{aligned} &a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \geq \\ &\geq 10 \cdot \sqrt[10]{a^4 \cdot b^4 \cdot c^4 \cdot d^4 \cdot a^2b^2 \cdot b^2c^2 \cdot c^2d^2 \cdot d^2a^2 \cdot a^2c^2 \cdot b^2d^2} = \\ &= 10 \cdot \sqrt[10]{a^{10} \cdot b^{10} \cdot c^{10} \cdot d^{10}} = 10 \cdot |abcd| \geq 10abcd \end{aligned}$$

12.1. Divas sniega tīrāmās mašīnas, strādājot vienlaicīgi, Sūnu ciema ielas var notīrīt 4 h 12 min. Ja pirmās mašīnas darba ražīgumu palielinātu divas reizes, bet otra mašīna sāktu strādāt par 10 minūtēm vēlāk nekā pirmā, tad sniegu notīrītu 2 h 30 min. Cik stundās sniegu Sūnu ciemā notīrītu, ja strādātu tikai otrā sniega tīrāmā mašīna?

Atrisinājums. Apzīmējam: x – tik stundās pirmā mašīna notīrītu sniegu, ja strādātu viena; y – tik stundās otrā mašīna notīrītu sniegu, ja strādātu viena. Tad vienā stundā pirmā mašīna notīrītu $\frac{1}{x}$ no visa sniega un otra mašīna notīrītu $\frac{1}{y}$ no visa sniega. Tā kā, strādājot vienlaicīgi, abas mašīnas sniegu var notīrīt 4 h 12 min jeb 4,2 stundās, iegūstam vienādojumu $\frac{4,2}{x} + \frac{4,2}{y} = 1$.

Ja pirmās mašīnas darba ražīgumu palielinātu divas reizes, tad tā vienā stundā notīrītu $\frac{2}{x}$ no visa sniega. Ja otra mašīna sāktu strādāt par 10 minūtēm vēlāk nekā pirmā, tad tā būtu strādājusi 2 h 20 min jeb $\frac{7}{3}$ h. Iegūstam vienādojumu $\frac{2 \cdot 2,5}{x} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{y} = 1$.

Apzīmējot $\frac{1}{x} = a$ un $\frac{1}{y} = b$, iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 4,2a + 4,2b = 1 \\ 5a + \frac{7}{3}b = 1 \end{cases} \text{ jeb } \begin{cases} 21a + 21b = 5 \\ -21a - 9,8b = -4,2 \end{cases}$$

Saskaitot abus pēdējās sistēmas vienādojumus, iegūstam $11,2b = 0,8$ jeb $b = \frac{8}{112} = \frac{1}{14}$. Tātad $y = \frac{1}{b} = 14$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka otrā sniega tīrāmā mašīna sniegu Sūnu ciemā notīrītu 14 stundās.

12.2. Pierādīt, ka starp jebkuriem 78 trīsciparu skaitļiem var atrast četrus tādus skaitļus, kuru ciparu summas ir vienādas!

Atrisinājums. Pavisam iespējamas 27 dažādas ciparu summas vērtības:

Ciparu summa	Trīsciparu skaitļi
1	100
2	101; 110; 200
...	...
26	899; 989; 998
27	999

Ievērojam, ka

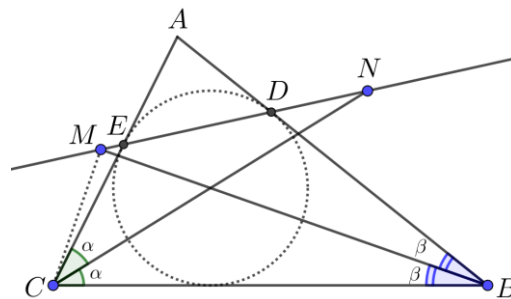
- 1) ciparu summa 1 un 27 katra ir tikai vienam skaitlim (100 un 999),
- 2) ciparu summa 2 un 26 katra ir tikai trīs skaitļiem (101; 110; 200 un 899; 989; 998).

Tātad šajās grupās vairāk skaitļu nevar būt neatkarīgi no tā, kurus 78 trīsciparu skaitļus izvēlamies. Pieņemsim, ka šīs četras grupas ir maksimāli piepildītas – tajās kopā ievietoti 8 skaitļi. Tad atlikušajās 23 grupās jāievieto $78 - 8 = 70$ skaitļi. **Ja katrā no šīm 23 grupām būtu ievietoti ne vairāk kā 3 skaitļi, tad kopā būtu izvietoti ne vairāk kā $3 \cdot 23 = 69$ skaitļi – pretruna tam, ka pa grupām jāizvieto 70 skaitļi. Līdz ar to noteikti ir tāda grupa, kurā ir vismaz četri skaitļi – tie arī ir meklētie četri skaitļi, kuru ciparu summas ir vienādas.**

Piezīme. Treknrakstā izceltā teksta vietā var būt, piemēram, arī šāds spriedums: tā kā $70 = 3 \cdot 23 + 1$, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir tāda grupa, kurā ir vismaz četri skaitļi – tie arī ir meklētie četri skaitļi, kuru ciparu summas ir vienādas.

12.3. Trijstūrī ABC ievilkta riņķa līnija pieskaras malai AB punktā D , bet malai AC punktā E . Leņķu B un C bisektrises krusto taisni DE attiecīgi punktos M un N . Pierādīt, ka punkti B, C, M un N atrodas uz vienas riņķa līnijas!

Atrisinājums. Tā kā CN un BM ir bisektrises, tad $\sphericalangle ACN = \sphericalangle NCB = \alpha$ un $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MBC = \beta$ (skat. 13. att.). No trijstūra ABC iegūstam, ka $\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BCA = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Tā kā $AE = AD$ kā pieskaru nogriežņi, kas vilkti no punkta A , tad trijstūris EAD ir vienādsānu un $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = \alpha + \beta$. Tā kā $\sphericalangle AEN$ ir trijstūra NEC ārējais leņķis, tad $\sphericalangle AEN = \sphericalangle ECN + \sphericalangle ENC$, no kurienes $\sphericalangle ENC = \sphericalangle AEN - \sphericalangle ECN = \alpha + \beta - \alpha = \beta$. Tā kā $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MBC = \beta$, tad ap četrstūri $CMNB$ var apvilkt riņķa līniju, tas ir, punkti B, C, M un N atrodas uz vienas riņķa līnijas.



13. att.

Piezīme. Risinājumā izmantota apgrieztā teorēma par ievilktajiem leņķiem: ja četrstūrī $ABCD$ ir spēkā vienādība $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, tad ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

12.4. Doti naturāli skaitļi a un b . Pierādīt

a) ja $20a + 18b$ dalās ar 7, tad $201a + 8b$ dalās ar 7;

b) ja $201a + 8b$ dalās ar 7, tad $20a + 18b$ dalās ar 7.

Atrisinājums. a) Ja $20a + 18b$ dalās ar 7, tad arī $6a + 4b$ dalās ar 7, jo $20a + 18b = 14a + 14b + (6a + 4b)$. Tas nozīmē, ka arī $7 \cdot 27a + 2(6a + 4b) = 201a + 8b$ dalās ar 7.

b) Ja $201a + 8b$ dalās ar 7, tad arī $201a + 8b - 7(28a + b) = 5a + b$ dalās ar 7. Tas nozīmē, ka arī $18(5a + b) - 7 \cdot 10a = 20a + 18b$ dalās ar 7.

12.5. Vienādojuma ar veseliem koeficientiem $x^4 + bx^2 + c = 0$ vienas saknes vērtība ir $\sqrt{20} - \sqrt{18}$. Atrast vienādojuma koeficientus un pārējās trīs saknes!

Atrisinājums. Ievērojam, ja $x = \sqrt{20} - \sqrt{18}$, tad $x^2 = 38 - 12\sqrt{10} > 0$ un $x^4 = 2884 - 912\sqrt{10}$.

Ievietojot doto sakni dotajā vienādojumā, iegūstam

$$2884 - 912\sqrt{10} + b(38 - 12\sqrt{10}) + c = 0; \quad (*)$$

$$2884 + 38b + c - 912\sqrt{10} - 12\sqrt{10}b = 0$$

Lai pastāvētu vienādība, iracionālajai un racionālajai daļai katrai atsevišķi jābūt 0, tas ir,

$$\begin{cases} 2884 + 38b + c = 0 \\ -912\sqrt{10} - 12b\sqrt{10} = 0 \end{cases}$$

Atrisinot iegūto vienādojumu sistēmu, iegūstam $b = -\frac{912}{12} = -76$ un $c = -2884 + 2888 = 4$.

Tātad sākotnējais vienādojums ir $x^4 - 76x^2 + 4 = 0$.

Aplūkojot (*), ievērojam, ka veiktie spriedumi un iegūtais vienādojums nebūtu mainījies, ja iracionālās daļas vērtība būtu ar pretēju zīmi, tas ir, $2884 + 912\sqrt{10} + b(38 + 12\sqrt{10}) + c = 0$, bet šādu sakarību var iegūt, ja $x = \sqrt{20} + \sqrt{18}$. No kā izriet, ka $x = \sqrt{20} + \sqrt{18}$ arī ir dotā vienādojuma sakne.

Ņemot vērā, ka $(-x)$ ir dotā vienādojuma sakne, ja x ir šī vienādojuma sakne, iegūstam, ka vienādojuma saknes ir $x_{1,2} = \sqrt{20} \pm \sqrt{18}$ un $x_{3,4} = -\sqrt{20} \pm \sqrt{18}$.