PUNKTIŅŠ (A grupa) Deju stunda
12.01.2018

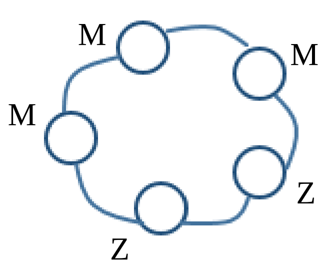
Nodarbības mērķis: Mācīties shematiski interpretēt uzdevumā doto lielumu savstarpējās sakarības, rosināt vizuālo iztēli, pamatot apgalvojumus.

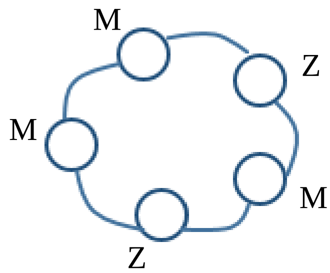
1. Deju grupā ir 5 bērni – zēni un meitenes. Katrs bērns draudzējas tieši ar diviem citiem bērniem. Vai var gadīties, ka meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem?

Piezīme. Pirms uzdevuma risināšanas ir svarīgi noskaidrot, vai visi skolēni saprot terminu "draudzība" – tās ir divu cilvēku savstarpējas attiecības, tas ir, Ja Anna draudzējas ar Lindu, tad arī Linda draudzējas ar Annu.

Risinājums. Ja grupā ir 5 bērni, tad viņu vidū ir vismaz 3 meitenes vai arī vismaz 3 zēni. Pieņemsim, ka meiteņu ir vairāk un jebkura no viņām draudzējas tikai ar meitenēm. Tad zēni ir tikai viens vai divi un nevar būt, ka viņi draudzējas tikai ar zēniem, jo tad katram no viņiem nebūtu tieši divi draugi. Tā ir pretrunā mūsu pieņēmumam, tātad ir zēni un meitenes, kuri draudzējas savā starpā.

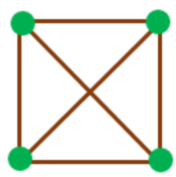
Komentārs. Ieteicams shematiski uzzīmēt draudzību grafu, lai attēlotu, kā bērni savā starpā draudzējas. Ir noderīgi apspriest dažādos izvietojuma gadījumus. Piemēram, ja grupā ir 3 meitenes un 2 zēni, tad draudzību grafi var atšķirties:



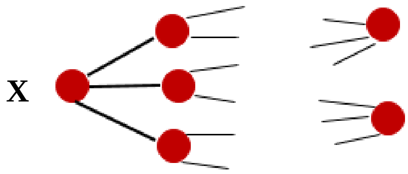


2. Deju grupā ir 6 bērni, un katrs draudzējas tieši ar 3 citiem bērniem. Vai var gadīties, ka meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem? Ja tas nav iespējams, tad kāds varētu būt mazākais bērnu skaits šādā grupā, kur meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem?

Risinājums. Mazākā bērnu grupa, kur katrs bērns draudzējas tieši ar 3 citiem bērniem, ir 4 bērni, kuri visi draudzējas savā starpā:



Tad pārējo divu bērnu starpā ir tikai 1 draudzība, kas ir pretrunā ar doto.
Aplūkosim vienu no bērniem **X** un viņa vai viņas 3 draugus. Ārpus šīs grupas ir vēl divi bērni, kur katrs draudzējas ar vēl vismaz diviem bērna **X** draugiem. Tāpēc te nevar izveidot divas nošķirtas bērnu grupas.



Te ir divas iespējas – vai nu šie divi bērni (skat zīmējuma labajā pusē) draudzējas savā starpā, tad katrs no viņiem draudzējas ar kādiem diviem **X** draugiem. Ja šie divi bērni savstarpēji nedraudzējas, tad katrs no viņiem draudzējas ar visiem bērna **X** draugiem. (Uzzīmējiet šīs iespējas, šos divus atšķirīgos grafus.)

Mazākā bērnu grupa, kur katrs bērns draudzējas tieši ar trim citiem bērniem un meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem, ir 8 bērni, kur ir 4 meitenes un 4 zēni. Visas meitenes draudzējas savā starpā, bet zēni – savā starpā (tāda situācija attēlota uzdevuma pirmajā zīmējumā).

3. Deju grupā ir 4 meitenes un 3 zēni. Gatavojoties deju svētkiem, bērni dejo pāros, lai noskaidrotu, kuri pāri piedalīsies uzvedumā. Vienā tūrē dejo uzreiz 3 pāri. Cik tūres bērniem jādejo, lai katra meitene būtu dejojusi ar katru zēnu?

Atrisinājums. Ja zēnam kopumā ir jādejo ar katru no meitenēm, tad viņam ir jādejo četras dejas. Katram zēnam jānodejo 4 dejas. No tā spriežam, ka nepieciešamas vismaz četras tūres. Parādīsim, ka ar 4 tūrēm pietiek. Meitenes apzīmēsim ar A, B, C, D, bet zēnus ar P, R, S.

Pirmā tūre: dejo pāri (A, P), (B, R), (C, S)

Otrā tūre: (B, P), (C, R), (D, S)

Trešā tūre: (C, P), (D, R), (A, S)

Ceturtā tūre: (D, P), (A, R), (B, S)

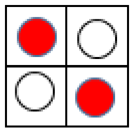
4. Zēniem jāmēģina jauna deju figūra. Ar katru izvēlēto pāri treneris strādā atsevišķi, tas ir, vienā laika momentā deju figūru mēģina tikai 2 zēni. Nodarbības beigās izrādījās, ka katrs no zēniem jauno figūru izmēģinājis atšķirīgu skaitu reižu. Kāda var būt pāru izveidošanas kārtība, ja grupā ir 4 zēni? Uzraksti piemēru! Nosaki mazāko mēģinājumu skaitu!

Atrisinājums. Pieņemsim, ka nodarbības laikā katrs zēns trenējās vismaz vienu reizi. Ja meklējam mazāko iespējamo mēģinājumu skaitu, tad jānosaka iespējami mazākais katra zēna mēģinājumu skaits, kas varētu būt 1, 2, 3 un 4 mēģinājumi. Kopējā katra zēna mēģinājumu skaita summa ir 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Treneris katrā mēģinājumā strādāja ar 2 zēniem. Ja bijuši 5 mēģinājumi, tad treneris kopumā strādājis ar 10 bērniem (daži no zēniem, protams, piedalījušies vairākos mēģinājumos). Parādīsim, ka tas ir iespējams, piemēram:

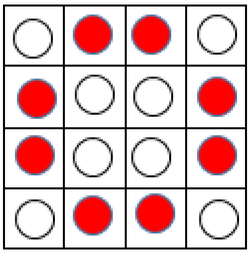
	1.mēģinājums	2.mēģinājums	3.mēģinājums	4.mēģinājums	5.mēģinājums
Patriks	x				
Renārs		x	x		
Silvestrs			x	x	x
Tālis	x	x		x	x

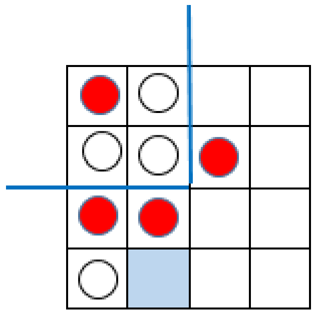
5. Deju svētkos piedalās daudzi deju kolektīvi un dalībnieku izvietojums laukumā veido dažādus krāsainus rakstus. 16 meitenes ir jāizvieto kvadrāta veidā 4 rindās un 4 kolonās tā, lai katrai meitenei baltā kleitā blakus atrastos tieši divas meitenes sarkanās kleitās, bet katrai meitenei sarkanā kleitā blakus atrastos ne vairāk kā viena meitene sarkanā kleitā. Cik meiteņu būs sarkanās kleitās? (Meitenes atrodas blakus, ja viņas stāv blakus vienā rindā vai vienā kolonā.)

Atrisinājums. Uzdevumu risināsim shematiski – kvadrātā 4 x 4 rūtiņas izvietosim baltus un sarkanus aplīšus. Vispirms apskatīsim kvadrātiņu 2 x 2 rūtiņas. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem tajā var izvietot ne vairāk kā 2 aplīšus sarkanā krāsā:



Uzdevumā ir prasīts, cik ir meiteņu sarkanās kleitās jeb cik sarkanos aplīšus jāizvieto rūtiņu kvadrātā. Mēģināsim to novērtēt skaitliski. Izvēlētajā kvadrātā ir 16 rūtiņas. Ja kvadrātu sagriezīsim četros kvadrātos ar izmēru 2 x 2 rūtiņas, tad lielākais sarkano aplīšu skaits var būt 8 – katrā kvadrātiņā divi sarkani aplīši. Pretējā gadījumā (ja sarkano aplīšus skaits ir lielāks par 8) kādā no četriem mazākajiem kvadrātiem būs izvietoti 3 vai pat 4 sarkanie aplīši, kas ir pretrunā ar doto. Izvietojums ar 8 sarkaniem aplīšiem ir iespējams:



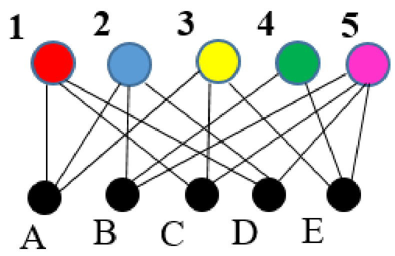


Vai iespējams, ka balto aplīšu ir vairāk nekā 8? Tad, līdzīgi spriežot, kādā no 4 mazajiem kvadrātiem būs 3 baltie aplīši (padomā, kāpēc 4 nevar būt?). Apskatīsim šāda izvietojuma iespējas, pieņemsim, ka 3 baltie aplīši ir kreisā augšējā stūrī. Tad kvadrāta 4 x 4 stūrī noteikti ir sarkanais aplītis, jo stūra rūtiņai ir tikai divas blakus pozīcijas un stūra rūtiņā izvietojot balto aplīti, tam blakus būtu ne vairāk kā viens sarkanais aplītis. Turpinot izvietojumu, spriežam, ka apakšējā kreisā stūrī izvietotam baltajam aplītim blakus jānovieto otrs sarkanais aplītis (šī pozīcija zīmējumā ir iekrāsota), bet tādā gadījumā sarkanajam aplītim virs iekrāsotās rūtiņas blakus atgadīsies divi sarkanie aplīši, kas ir pretrunā ar doto.

Tātad, meiteņu izvietojumā būs tieši 8 meitenes sarkanās kleitās.

6. Katrai no piecām meitenēm ir jāizvēlas viena no piecām balles kleitām. Katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, bet jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā 2 kleitas. a) Vai var gadīties, ka tieši 2 kleitas patīk visām meitenēm? b) Vai var gadīties, ka tieši viena kleita patīk visām meitenēm?

Atrisinājums. Vispirms ir jānoskaidro, vai uzdevumā minētā situācija vispār ir iespējama. Pieņemsim, ka meitenes ir A, B, C, D, E, bet kleitas sanumurēsim 1, 2, 3, 4, 5. Parādīsim situāciju shematiski, kur katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, bet jebkurām trim meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā 2 kleitas. Piemēram:



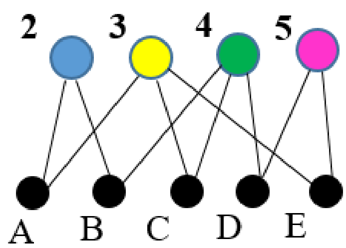
Varam arī izveidot tabulu, kurā redzam, kādas kleitas kurai meitenei patīk (protams, var būt arī citādi piemēri):

Anna	1 2 3
Baiba	2 4 5
Cilda	1 3 5
Dace	1 2 4
Emīlija	3 4 5

No shematiskā zīmējuma (matemātikā to sauc par grafu) un no tabulas redzams, ka jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā divas kleitas (pārbaudi!).

a) Vai ir iespējams, ka tieši divas kleitas patīk visām meitenēm? Pieņemsim, ka tas ir iespējams, pieņemsim, ka tās ir pirmā un otrā kleita. Ievērojot, ka katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, tad no atlikušajām trim (trešās, ceturtās un piektās) katrai patīk tieši viena kleita. Tā kā ir 5 meitenes un 3 kleitas, tad vismaz viena kleita patiks vairāk kā vienai meitenei (saskaņā ar Dirihlē principu). Tātad vismaz divām meitenēm vienlaikus patiks vismaz 3 kleitas, kas ir pretrunā ar doto. Tāpēc nav iespējams, ka visām meitenēm vienlaikus patīk tieši divas kleitas.

b) Vai ir iespējams, ka visām meitenēm vienlaikus patīk tieši viena kleita? Jā, tas ir iespējams. Pieņemsim, ka visām patīk sarkanā kleita (pirmā). Tad no atlikušajām kleitām katrai meitenei patīk tieši divas un jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā viena kleita. Attēlosim to ar piemēru shematiski, paturot prātā, ka sarkanā kleita patīk vienlaikus visām meitenēm:



Piezīme. Uzdevuma spriedumā var izmantot **Dirihlē principu**:

Ja vairāk kā *n* elementi jāsadala tieši *n* grupās, tad kādā no grupām atradīsies vismaz 2 elementi.