PUNKTIŅŠ (A grupa) Sakārtosim, novērtēsim

19.01.2018

Nodarbības mērķis: atrast doto elementu kopīgās un atšķirīgās īpašības, veikt skaitliskus novērtējumus. Šādas iemaņas ir nepieciešamas daudzu uzdevumu atrisināšanā, arī tādu uzdevumu atrisināšanā, kur pamatojumus var veikt, balstoties uz Dirihlē principu.

1. Apskatīsim deviņus naturālos skaitļus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Meklēsim atbildes uz jautājumiem:

a) Cik dažādas divu dažādu skaitļu summas var iegūt no dotajiem skaitļiem?

b) Cik dažādu skaitļu pārus var izveidot?

c) Cik var izveidot tādus dažādu skaitļu pārus, kuru summa nav lielāka par 13?

d) Kāds var būt lielākais tādu skaitļu skaits, lai saskaitot jebkurus 3 no tiem, to summa būtu vismaz 17?

Atrisinājums.

a) Vismazāko summu iegūsim no mazākajiem skaitļiem – tā ir 1 + 2 = 3, līdzīgi lielākā divu dažādu skaitļu summa ir 17. Tad visas dažādās summas ir no 3 līdz 17, to skaits ir 17 – 3 + 1 = 15.

b) Katru no dotiem 9 skaitļiem var likt pārī ar vienu no 8 skaitļiem. Ievērojot, ka izvēlēto skaitļu secībai nav nozīmes (piemēram, pāris 2 un 5 ir tas pats pāris 5 un 2), tad kopējais pāru skaits ir $\frac{9\cdot 8}{2}=36$.

Piezīme. Pāru skaita noteikšanu var izpildīt uzskatāmi, shematiski. Apļa formā izkārtojam 9 punktus (vai aplīšus), kas simboliski apzīmē katru no skaitļiem. Var aplūkot divus paņēmienus kā veidojas pāri. 1) Katru punktu uzreiz savieno ar visiem citiem punktiem, novelkot nogriežņus. No katra punkta iziet 8 nogriežņi – izejošo nogriežņu kopējais skaits ir 72. Katram no nogrieznim ir divi gali, tāpēc katrs nogrieznis tika pieskaitīts divas reizes. Nogriežņu skaits ir 36. 2) Nogriežņus velk pakāpeniski. Pirmajam skaitlim jeb punktam atzīmējam visus astoņus iespējamos pārus. Nākošais punkts jau ir savienots ar pirmo punktu, tad tas var veidot vēl septiņus citus pārus. Un tā turpinām. Tad pāru skaitu aprēķina: 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36.

c) Risināsim uzdevumu "no otra gala" - pievērsīsim uzmanību lielākajām summām – tās ir 17, 16, 15 un 14. Tādi ir tikai 6 pāri: (9; 8), (9; 7), (9; 6), (9; 5), (8; 7), (8; 6). Tāpēc to pāru skaits, kuru skaitļu summa ir ne lielāka par 13, ir 36 – 6 = 30.

d) Apskatīsim lielāko 3 skaitļu summu. 9 + 8 + 7 = 24. Šo trīs skaitļu grupai var pievienot jebkurus tādus skaitļus, kur triju vismazāko skaitļu summa ir vismaz 17. Apskatīsim 4, 5, 6. To summa ir 15. Tāpēc jebkuru trīs dažādu skaitļu summa, kur skaitļi ir mazāki par 7, nebūs derīga. Skaitļu grupa, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, sastāv no 5 skaitļiem. Ir divi varianti (9; 8; 7; 6; 5) vai (9; 8; 7; 6; 4).

2. Katram no 4 zēniem ir sīknauda. Vai var gadīties, ka diviem zēniem ir vienāds naudas daudzums, ja

a) dažas no zēnu naudas starpībām ir 1, 3 un 5 centi un nevienam no zēniem nav vairāk kā 6 centi;

b) dažas no zēnu naudas starpībām ir 2, 3 un 5 centi un nevienam no zēniem nav vairāk kā 7 centi?

Atrisinājums.

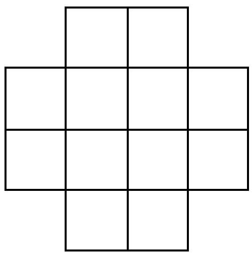
a) Pieņemsim, ka diviem zēniem ir vienāds naudas daudzums. Tad trim zēniem katram ir citāds naudas daudzums, ko apzīmēsim a, b, c. Varam pieņemt, ka vismazākais skaitlis ir a, bet vislielākais ir c:

$$a < b < c$$

Tad lielāko iespējamo starpību 5 var iegūt tikai vienā veidā, ja $a = 1$, bet $c = 6$. Starpību 3 var veidot b un c, tad $b = 3$. tādā gadījumā $b - a = 2$, kas neatbilst nosacījumiem. Ja starpību 3 veido a un b, tad $b = 4$, bet $c - b = 2$, kas atkal neatbilst nosacījumiem. No tā seko, ka visiem zēniem var būt dažāds naudas daudzums. Tas ir iespējams. Zēniem ir, piemēram, 1, 2, 3 un 6 centi. (Atrodi arī citus variantus!)

b) Šis gadījums ir iespējams. Trīs zēniem var būt 2, 3 un 7 centi (vai arī 1, 3, un 6 centi), ceturtajam zēnam naudas daudzums var sakrist ar jebkuru no minētajiem.

3. Sekojošā figūrā katrā rūtiņā ir jāieraksta viens pirmskaitlis. Kādus pirmskaitļus jāieraksta rūtiņās tā, lai katru divu skaitļu summa blakus rūtiņās arī būtu pirmskaitlis un iegūto pirmskaitļu skaits būtu lielākais iespējamais? (Blakus rūtiņām ir kopīga mala.)



Atrisinājums. Lai blakus esošās rūtiņās divu skaitļu summa būtu pirmskaitlis, tad jāievēro, ka gandrīz visi pirmskaitļi, izņemot skaitli 2, ir nepāra skaitļi. No tā seko, ka pirmskaitlis 2 ir jāieraksta rūtiņās, kuras saskaras ar stūriem. Atlikušās sešās rūtiņās ieraksta visus dažādus pirmskaitļus, kuriem pieskaitot 2, atkal iegūst pirmskaitli. Dažādus pirmskaitļu izvēlas, lai iegūtu lielāko dažādo summu skaitu. Noteiksim to. Figūras stūros var ierakstīt 4 dažādus pirmskaitļus, kuri kopumā dos 4 dažādas summas. Centrā ierakstītie divi pirmskaitļi papildus dos vēl divas citas summas. Tāpēc lielākais dažādo summu skaits ir 6.

Aizpildījuma piemērs:

	2	3	
2	5	**2**	11
17	**2**	29	**2**
	41	**2**	

4. Kuram skaitlim no 1 līdz 100 ir vislielākais skaits dažādu dalītāju? Cik dalītāju ir šim skaitlim? Vai ir atrodami arī citi skaitļi no 1 līdz 100 ar tādu pašu dalītāju skaitu?

Komentārs. Pirmskaitļus, kuru reizinājums ir vienāds ar doto skaitli, sauc par šī skaitļa pirmreizinātājiem. **Aritmētikas fundamentālā teorēma** apgalvo: jebkuru naturālu skaitli (izņemot skaitli 1) var izteikt kā vienu pirmskaitli vai sadalīt vairāku pirmskaitļu reizinājumā vienā vienīgā veidā.

(Avots: http://mathworld.wolfram.com/FundamentalTheoremofArithmetic.html)

Atrisinājums. Apskatam kādu skaitli un sadalām to pēc iespējas sīkākos reizinātājos, tas ir, pirmreizinātājos. Piemēram, skaitli 80 var sadalīt sekojošā veidā:

$$80 = 8 \cdot 10 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

Noteiksim skaitļa dalītāju skaitu. Vispirms apskatīsim, cik dalītājus var izveidot no dotajiem četriem skaitļiem 2. Tie ir 2, 4, 8, 16. Skaitļa dalītājs ir arī 5 un to var kombinēt ar visiem divnieku reizinājumiem, iegūstot dalītājus 10, 20, 40 un 80. Tad kopējais skaitļa 80 dalītāju skaits ir 10, jo skaitlis dalās arī ar 1.

Ja gribam atrast tādu skaitli, kuram ir vairāk nekā 10 dalītāji, tad jāizvēlas lielāks skaitļa pirmreizinātāju skaits. Skaitļa dalītāju skaits ir atkarīgs no pirmreizinātāju skaita un veida. Vismazākais pirmskaitlis ir 2. Sareizinot sešus divniekus, iegūstam skaitli 64, kuram ir tikai 7 dalītāji (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64). Izvēloties visus vienādus pirmreizinātājus, vairāk kā 6 dažādus skaitļa (kurš mazāks par 100) dalītājus iegūt nevar. (Pārbaudi arī citus iespējamos pirmskaitļus!) Tāpēc izdevīgi izvēlēties vismaz divus dažādus pirmreizinātājus.

Aplūkosim lielāko skaitli no dotajiem, tā pirmreizinātāji ir $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ un dažādo dalītāju skaits ir 9.

Aizvietosim lielāko pirmreizinātāju 5. Tā vietā var izvelēties divus pirmreizinātājus 2, jo $2 \cdot 2 = 4 < 5$ un tā iegūstam mazāku reizinājumu - skaitli 80, kuru jau apskatījām. Abus pieciniekus aizvietojot ar četriem divniekiem, iegūstam reizinājumu 64. Ja izvēlēsimies trīs dažādus pirmskaitļus, tad viena pirmreizinātāja 5 vietā izvēlēsimies skaitli 3, un tad pirmreizinātāji izveido skaitli $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Šim skaitlim ir 12 dalītāji (1, 2, 4, 3, 5, 6, 12, 10, 20, 15, 30, 60).

Līdzīgi var izvēlēties pirmreizinātāju komplektus

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$; $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$; $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 96$

Ir vairāki skaitļi, kuri ir mazāki par 100 un kuriem dalītāju skaits ir 12. Tie ir skaitļi 60, 72, 90 un 96. Citiem skaitļiem (mazākiem par 100) dalītāju skaits ir mazāks.

Piezīme. Var veidot vispārīgāku pierādījumu, balstītoties uz sekojošu teorēmu:

Teorēma. Ja skaitļa *n* sadalījums pirmskaitļu reizinātājos ir

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots . p_k^{\alpha_k},$$

tad skaitļa *n* visu dalītāju skaitu s var aprēķināt sekojoši

$$s = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Piemēram, ja skaitļa pirmreizinātāji ir *t* divnieki, *m* trijnieki un *k* piecinieki, tad visu skaitļa dalītāju skaits ir *(t+1)(m+1)(k+1).*

5. 30 konfektes ir jāsaliek vairākās kastītēs. Nevienā kastītē nevar ielikt vairāk kā 8 konfektes. Kā sadalīt konfektes,

a) lai būtu jāizmanto pēc iespējas mazāk kastīšu un katrā kastītē būtu citāds konfekšu skaits?

b) lai, salīdzinot katru divu kastīšu konfekšu skaita starpību, visas šīs starpības ir atšķirīgas?

Atrisinājums.

a) Ja 30 konfektes jāsadala pa kastītēm, kur vairāk kā 8 ielikt nevar, tad ir nepieciešamas vismaz 4 kastītes, jo trīs kastītēs kopumā var ielikt lielākais 24 konfektes. Lai katrā kastītē būtu dažāds konfekšu skaits un mēs izmantotu pēc iespējas mazāk kastīšu, tad tajās jāliek cik vien iespējams liels konfekšu skaits, tas ir, $8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 30$. Mazākais kastīšu skaits ir 5.

b) Pieņemsim, ka konfektes izvietotas kastītēs, saskaņā ar nosacījumu. Tad nav divu tādu kastīšu, kurās ir vienāds konfekšu skaits. Pretējā gadījumā abām kastītēm sakritīs konfekšu skaita starpības ar citām kastītēm. Tāpēc ir vismaz piecas kastītes. Piecas kastītes veido 10 dažādus pārus, tāpēc kastīšu pāru skaits ir vismaz 10. Kopumā ir jābūt vismaz 10 dažādām skaita starpībām, bet lielākā iespējamā starpība ir 7 (kastītē nevar ielikt vairāk kā 8 konfektes), tāpēc iespējamas tikai 7 dažādas starpības, kas ir par maz, lai būtu izpildīti uzdevuma nosacījumi. Variantu b) realizēt nevar.