

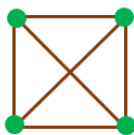
PUNKTIŅŠ (B grupa) Deju stunda

12.01.2018

Īsi risinājumi un komentāri

1. Deju grupā ir 6 bērni, un katrs draudzējas tieši ar 3 citiem bērniem. Vai var gadīties, ka meitenes draudzējas tikai ar meitenēm, bet zēni – tikai ar zēniem?

Atrisinājums. Grupā ir vismaz 3 zēni vai vismaz 3 meitenes. Pieņemsim, ka meitenes ir vismaz 3. Ja meitenes ir tieši 3 un visas draudzējas tikai savā starpā, tad katrai no viņām ir tikai 2 draugi, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Var gadīties, ka 4 meitenes visas draudzējas savā starpā un katrai ir tieši 3 draugi, ko shematiski var attēlot šādi:



Tad atlikušajiem diviem bērniem savstarpēji ir ne vairāk kā viena draudzība, kas ir mazāk nekā uzdevuma nosacījumos minētās 3 draudzības. Vai var būt piecu meiteņu grupa, kuras draudzējas tikai savā starpā un katrai ir tieši 3 draudzenes?

Pieņemsim, ka tā var būt. Ja katrai meitenei pajautāsim, kuras ir viņas draudzenes, tad mēs saņemsim tieši 15 atbildes. Draudzība ir abpusēja, tāpēc katra draudzība ir pieminēta divas reizes (Kate teica, ka viņa draudzējas ar Annu, arī Anna teica, ka viņa draudzējas ar Kati). Bet draudzību skaits ir nepāra skaitlis, tāpēc pieņēmums ir nepareizs.

2. Deju kolektīvs ir ļoti draudzīgs. Katra meitene pateica, ar cik zēniem viņa draudzējas, bet katrs zēns pateica, ar cik meitenēm viņš draudzējas. Kad saskaitīja visus paziņojumus, izrādījās, ka meitenes kopumā pateikušas par 35 draudzībām, bet zēni – par 46. Vai tas var būt?

Komentārs. Šis uzdevums līdzīgs iepriekšējam, jāievēro, ka draudzība starp diviem cilvēkiem ir abpusēja. Izskaidro sīkāk, kāpēc uzdevumā minētie skaitļi vienlaikus nevar atgadīties!

3. Zēniem jāmēģina jauna deju figūra. Viņus trenē pa pāriem, katru pāri kombinējot atsevišķi. Nodarbības beigās izrādījās, ka katrs no zēniem jauno figūru izmēģinājis atšķirīgu skaitu reizi. Kāda var būt pāru izveidošanas kārtība, ja grupā ir 5 zēni? Uzraksti piemēru! Nosaki mazāko mēģinājumu skaitu!

Atrisinājums. Ja ir n mēģinājumi, tad treneris kopumā ir trenējis $2n$ zēnus (daži zēni šajā skaitā iekļauti vairākas reizes). Ja katrs zēns jauno deju figūru ir mēģinājis vismaz vienu reizi, tad mazākais mēģinājumu skaits būs tad, ja arī zēni mēģinājuši pēc iespējas mazāko skaitu reizi. Ir pieci zēni un vismazākā piecu dažādu naturālu skaitļu summa ir $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, kas ir nepāra skaitlis. Jāsecina, ka vismaz viens zēns ir trenējies vairāk reizi. Nākamā mazākā dažādo skaitļu summa ir, ja skaitli 5 aizvieto ar 6. Tad mēģinājumu skaits n ir vismaz 8 (mazāk par 8 nevar būt, jo mazākais kopējais dažādo piedalīšanos skaits ir 16). Parādīsim, ka ar 8 mēģinājumiem pietiek (zēnus apzīmēsim A, B, C, D, E, bet kolonās atzīmēsim pārus atsevišķajos treniņos):

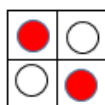
	1	2	3	4	5	6	7	8
A	x							
B		x	x	x		x	x	x
C	x							x
D			x	x	x			
E		x			x	x	x	

Tabulā redzams, ka A mēģinājis 1 reizi, C – divas, D – trīs, E – četras, bet B – 6 reizes.

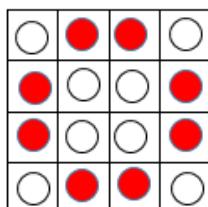
Piezīme. Atrisini uzdevumu, ja kāds no zēniem nevienu reizi nav pamēģinājis jauno deju figūru!

4. Deju svētkos ir jāizvieto 16 meitenes kvadrāta veidā 4 rindās un 4 kolonās tā, lai katrai meitenei baltā kleitā blakus atrastos tieši divas meitenes sarkanās kleitās, bet katrai meitenei sarkanā kleitā blakus atrastos ne vairāk kā viena meitene sarkanā kleitā. Cik meiteņu būs sarkanās kleitās? (Meitenes atrodas blakus, ja viņas stāv blakus vienā rindā vai vienā kolonā.)

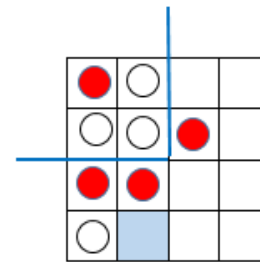
Atrisinājums. Uzdevumu risināsim shematiski – kvadrātā 4 x 4 rūtiņas izvietosim baltus un sarkanus aplišus. Vispirms apskatīsim kvadrātiņu 2 x 2 rūtiņas. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem tajā var izvietot ne vairāk kā 2 aplišus sarkanā krāsā:



Uzdevumā ir prasīts, cik ir meiteņu sarkanās kleitās jeb cik sarkanos aplišus jāizvieto rūtiņu kvadrātā. Mēģināsim to novērtēt skaitliski. Izvēlētajā kvadrātā ir 16 rūtiņas. Ja kvadrātu sagriezīsim četros kvadrātos ar izmēru 2 x 2 rūtiņas, tad lielākais sarkano aplišu skaits var būt 8 – katrā kvadrātiņā divi sarkani apliši. Pretējā gadījumā (ja sarkano aplišu skaits ir lielāks par 8) kādā no četriem mazākajiem kvadrātiem būs izvietoti 3 vai pat 4 sarkanie apliši, kas ir pretrunā ar doto, jo tad šai kvadrātā kādam sarkanajam aplītim blakus atradīsies citi divi sarkanie apliši. Izvietojums ar 8 sarkaniem aplīšiem ir iespējams:



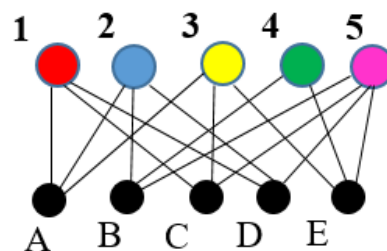
Vai iespējams, ka balto aplīšu ir vairāk nekā 8? Tad, līdzīgi spriežot, kādā no 4 mazajiem kvadrātiem būs 3 baltie aplīši (padomā, kāpēc 4 nevar būt?). Apskatīsim šāda izvietojuma iespējas, pieņemsim, ka 3 baltie aplīši ir kreisā augšējā stūrī. Tad kvadrāta 4 x 4 stūrī noteikti ir sarkanais aplītis, jo stūra rūtiņai ir tikai divas blakus pozīcijas un stūra rūtiņā izvietojot balto aplīti, tam blakus būtu ne vairāk kā viens sarkanais aplītis. Turpinot izvietojumu, spriežam, ka apakšējā kreisā stūrī izvietotam baltajam aplītim blakus jānovieto otrs sarkanais aplītis (šī pozīcija zīmējumā ir iekrāsota), bet tādā gadījumā sarkanajam aplītim virs iekrāsotās rūtiņas blakus atgādīsies divi sarkanie aplīši, kas ir pretrunā ar doto.



Tātad, meiteņu izvietojumā būs tieši 8 meitenes sarkanās kleitās.

5. Katrai no piecām meitenēm ir jāizvēlas viena no piecām balles kleitām. Katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, bet jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā 2 kleitas. a) Vai var gadīties, ka tieši 2 kleitas patīk visām meitenēm? b) Vai var gadīties, ka tieši viena kleita patīk visām meitenēm?

Atrisinājums. Meitenes apzīmēsim A, B, C, D, E, bet kleitas sanumurēsim 1, 2, 3, 4, 5. Uzzīmēsim grafu, kas parāda, ka uzdevumā aprakstītā situācija ir iespējama. Piemēram:



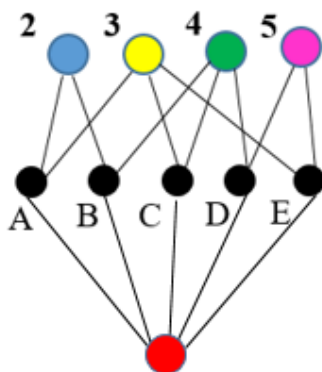
Doto piemēru var attēlot arī tabulas veidā:

A	1 2 3
B	2 4 5
C	1 3 5
D	1 2 4
E	3 4 5

Redzams, ka jebkurām divām meitenēm vienlaikus patīk ne vairāk kā divas kleitas (pārbaudi!).

- a) Pieņemsim, ka ir iespējams, ka tieši divas kleitas patīk visām meitenēm. Ievērojot, ka katrai meitenei patīk tieši 3 kleitas, tad no atlikušajām trim katrai patīk tieši viena kleita. Tā kā ir 5 meitenes un 3 atlikušās kleitas, tad vismaz viena kleita patīks vairāk kā vienai meitenei (saskaņā ar Dirihlē principu), tātad vismaz divām meitenēm vienlaikus patīks vismaz 3 kleitas, kas ir pretrunā ar doto.

b) Gadījums, kad visām meitenēm patīk tieši viena kleita, ir iespējams, piemēram:



Piezīme. Uzdevuma spriedumā var izmantot **Dirihlē principu**:

Ja vairāk kā n elementi jāsadala tieši n grupās, tad kādā no grupām atradīsies vismaz 2 elementi.

6. Deju kolektīvam ir jāpiedalās gan Vācijas, gan Itālijas deju konkursos. Šajā kolektīvā katram bērnam ir vismaz viens draugs. Vadītājs nolēma, ka daļa no bērniem brauks uz Itāliju, bet otra daļa uz Vāciju. Vai viņš var sadalīt bērnus divās grupās tā, lai tie bērni, kuri brauks uz Itāliju, varētu draugiem pastāstīt par saviem iespaidiem, bet bērni, kas brauks uz Vāciju, pastāstīs par saviem piedzīvojumiem, un visi bērni būs guvuši informāciju gan par Itāliju, gan Vāciju?

Risinājuma ideja. Sarakstu sāksim veidot ar jebkuru vienu kolektīva dalībnieku. Sūtīsim viņu uz Vāciju, bet visus viņa draugus – uz Itāliju. Tad visus pirmā dalībnieka draugu draugus, kuri vēl nav ierakstīti sarakstā, sūtīsim atkal uz Vāciju. Ja tādu nav, tad atkal izvēlēsimies jebkuru dalībnieku, kurš vēl nav ierakstīts sarakstā un veiksīm tāda paša veida sadalījumu.